

Apuntes de Análisis de Circuitos

Margarita Manterola

1 de abril de 2005

Capítulo 1

Régimen Senoidal Permanente

Cuando a un circuito cualquiera se lo somete a una excitación de tipo senoidal, la respuesta permanente tendrá la forma general $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, o bien $F \cos(\omega t + \phi)$.

Para analizar el régimen permanente de circuitos sometidos a este tipo de excitación se utiliza una técnica que permite no tener que realizar las ecuaciones diferenciales para obtener la respuesta.

I_F

ϕ

1.1. Definiciones generales

R_F Se denomina **fasor** a un segmento orientado, que gira con velocidad angular ω , alrededor del centro de coordenadas.

Figura 1.1: un fasor, con su parte real e imaginaria.

$$f(t) = F \cos(\omega t + \phi) \quad (1.1)$$

$$F e^{j(\omega t + \phi)} = F (\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)) \quad (1.2)$$

$$f(t) = F e^{j(\omega t + \phi)} + F e^{-j(\omega t + \phi)} \quad (1.3)$$

1.1.1. Impedancia compleja

Si se define un fasor V para la tensión en un elemento, y otro fasor I para la corriente en ese elemento, es posible encontrar la impedancia correspondiente a ese elemento como $Z = \frac{V}{I}$.

Si ambos fasores tienen una misma frecuencia ω , la diferencia angular entre ellos permanecerá constante.

Se llama **reactancia** a la parte imaginaria de una impedancia compleja, y **resistencia** a la parte real. La inversa de la impedancia es la **admittancia**, mientras que la inversa de la reactancia es la **susceptancia**.

1.1.2. Impedancia compleja en el Resistor

Para un circuito como el de la figura 1.2, Se define $v(t) = V_{\text{máx}} e^{j\phi} e^{j\omega t}$, de modo que la corriente será $i(t) = \frac{V_{\text{máx}}}{R} e^{j\phi} e^{j\omega t}$

Por otro lado, en forma fasorial, $V = V_{\text{máx}} e^{j\phi}$, y $I = \frac{V_{\text{máx}}}{R} e^{j\phi}$

Como se puede apreciar, en el caso del resistor, la corriente y la tensión permanecen en fase, ya que tienen una misma frecuencia ω y se diferencian

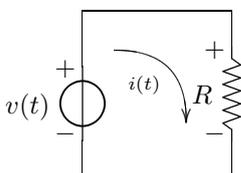


Figura 1.2: Tensión y corriente en un resistor.

únicamente en un factor de escala.

La impedancia compleja del resistor estará dada por la ecuación (1.4).

$$Z_R = R \quad (1.4)$$

1.1.3. Impedancia compleja en el Capacitor

Para un circuito como el de la figura 1.3, Se define $v(t) = V_{\text{máx}}e^{j\phi}e^{j\omega t}$, de modo que la corriente será $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = j\omega CV_{\text{máx}}e^{j\phi}e^{j\omega t}$.

Mientras que el fasor de la tensión será $V = V_{\text{máx}}e^{j\phi}$ y el de la corriente será $I = j\omega CV_{\text{máx}}e^{j\phi}$.

Teniendo en cuenta que es posible escribir $j = e^{j\pi/2}$, la corriente se puede expresar como $I = \omega CV_{\text{máx}}e^{j\phi+\pi/2}$. Es decir que la corriente en el capacitor **adelanta** a la tensión en $\pi/2$.

Es importante recordar que esto vale para el régimen permanente. No quiere decir que durante el transitorio empiece a circular la corriente antes que la tensión, sino que durante el permanente, la fase de la corriente está adelantada en $\pi/2$.

La impedancia compleja del capacitor estará dada por la ecuación (1.5).

$$Z_C = \frac{-j}{\omega C} \quad (1.5)$$

Dado que la impedancia es imaginaria pura, es evidente que la reactancia es $X_C = \frac{-1}{\omega C}$ y la resistencia es nula.

1.1.4. Impedancia compleja en el Inductor

Para un circuito como el de la figura 1.5, Se define $v(t) = V_{\text{máx}}e^{j\phi}e^{j\omega t}$, de modo que la corriente será $i(t) = \frac{1}{L} \int v(\tau)d\tau + i(0)$, el último término ($i(0)$), no se considera en este análisis ya que afecta al régimen transitorio y no al permanente.

$$i(t) = \frac{1}{L}V_{\text{máx}}e^{j\phi} \int e^{j\omega t} dt \quad (1.6)$$

$$i(t) = \frac{1}{j\omega L}V_{\text{máx}}e^{j\phi}e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

Mientras que el fasor de la tensión será $V = V_{\text{máx}}e^{j\phi}$ y el de la corriente será $I = \frac{1}{j\omega L}V_{\text{máx}}e^{j\phi}$.

Teniendo en cuenta que es posible escribir $1/j = e^{-j\pi/2}$, la corriente se puede expresar como $I = \omega CV_{\text{máx}}e^{j\phi-\pi/2}$. Es decir que la corriente en el inductor **atrás**a a la tensión en $\pi/2$.

Al igual que en el caso del capacitor, no hay que olvidar que esto vale únicamente para el régimen permanente.

La ecuación (1.8) indica el valor de la impedancia compleja del inductor.

$$Z_L = j\omega L \quad (1.8)$$

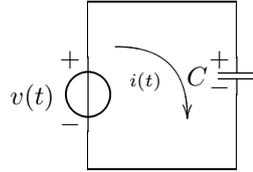


Figura 1.3: Tensión y corriente en un capacitor.

Figura 1.4: Diagrama fasorial de la tensión y la corriente en un capacitor.

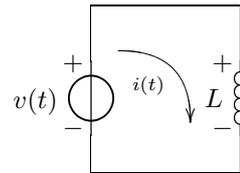


Figura 1.5: Tensión y corriente en un inductor.

Figura 1.6: Diagrama fasorial de la tensión y la corriente en un inductor.

Como en el caso del capacitor, dado que la impedancia es imaginaria pura, es evidente que la reactancia es $X_L = \omega L$ y la resistencia es nula.

$$I_C = v\omega C \qquad V_L = I\omega L \qquad V_R = IR$$

1.1.5. Generalización $I_R = \frac{V}{R}$

Se puede generalizar el comportamiento de la corriente de los tres componentes, en función de la tensión. O también, el comportamiento de la tensión en función de la corriente. Esto se ilustra en las figuras 1.7 y 1.8.

$$V_C = \frac{I}{\omega C}$$

Figura 1.7: Fasores de corriente en función del fasor tensión.

Figura 1.8: Fasores de tensión en función del fasor corriente.

Como ya se dijo más de una vez, todo este análisis es válido únicamente para régimen senoidal permanente.

1.2. Análisis del circuito RLC

Para un circuito como el de la figura ??, si la alimentación de la fuente está dada por $v(t) = V \cos(\omega t)$, se puede definir una función compleja cuya parte real sea $v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$, de forma que la corriente del circuito estará dada por $i(t) = \text{Re}(I e^{-j(\omega t + \phi)})$.

Es posible con este nuevo método plantear y resolver la malla del circuito en forma fasorial, sin necesidad de utilizar las ecuaciones diferenciales.

$$V e^{j\omega t} = R I e^{j\omega t} + L j\omega I e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} I e^{j\omega t} \quad (1.9)$$

$$V e^{j\omega t} = I e^{j\omega t} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \quad (1.10)$$

$$V = I \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \quad (1.11)$$

$$I = \frac{V}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (1.12)$$

Una vez obtenida la expresión compleja para el fasor I , es posible multiplicarla por el conjugado para obtener su parte real.

Capítulo 2

Transformada de Laplace

Aplicar la transformada de Laplace a las ecuaciones de un circuito nos permite analizar fácilmente la respuesta en frecuencia de ese circuito.

2.1. Definición y propiedades

La transformada de Laplace $F(s)$ de la función $f(t)$ está dada por la ecuación (2.1).

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \partial t \quad (2.1)$$

Mientras que la anti-transformada está dada por la ecuación (2.2).

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \int_0^{\infty} e^{st} F(s) \partial t \quad (2.2)$$

Linealidad

$$\mathcal{L}\{Af_1(t) + Bf_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} (Af_1(t) + Bf_2(t)) \partial t \quad (2.3)$$

$$= AF_1(s) + BF_2(s) \quad (2.4)$$

Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-a) \partial t \quad (2.5)$$

$$= e^{-as} F(s) \quad (2.6)$$

Desplazamiento en frecuencia

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) \partial t \quad (2.7)$$

$$= F(s-a) \quad (2.8)$$

Escalamiento

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) \partial t \quad (2.9)$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (2.10)$$

Derivación

La transformada de Laplace nos permite trabajar con derivadas de forma algebraica. A continuación la deducción para la transformada de la primera derivada.

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) \partial t \quad (2.11)$$

$$= e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \partial t \quad (2.12)$$

$$= sF(s) - f(0) \quad (2.13)$$

La deducción para la segunda derivada es equivalente.

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f''(t) \partial t \quad (2.14)$$

$$= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (2.15)$$

Integración

Al igual que con las derivadas, la transformada de Laplace nos permite trabajar con las integrales de manera algebraica.

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) \partial \tau\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) \partial \tau\right) dt \quad (2.16)$$

$$= \frac{1}{s} F(s) \quad (2.17)$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.18)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.19)$$

Transformada de la convolución

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \partial \tau\right\} = F_1(s) F_2(s) \quad (2.20)$$

2.2. Algunas transformadas comunes

Escalón unitario

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t)\partial t = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2.21)$$

Impulso unitario

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = s\mathcal{L}\{u(t)\} - u(0^-) = \frac{s}{s} - 0 = 1 \quad (2.22)$$

Exponencial

$$\mathcal{L}\{e^{at}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}u(t)dt = \frac{1}{s-a} \quad (2.23)$$

Donde a puede ser cualquier número complejo de la forma $a = k + j\omega$. O directamente $a = j\omega$.

De hecho, la transformada de $e^{-j\omega t}u(t)$ ($\frac{1}{s+j\omega}$) y la transformada de $e^{j\omega t}u(t)$ ($\frac{1}{s-j\omega}$), pueden resultar muy útiles para resolver circuitos de primer y segundo orden.

Funciones senoidales

Las transformadas del seno y el coseno pueden obtenerse a partir de la transformada de la exponencial, utilizando la fórmula de Euler.

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}u(t)\right\} \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{s+j\omega + s-j\omega}{s^2 - \omega^2}\right) \quad (2.25)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)u(t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2} \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}u(t)\right\} \quad (2.27)$$

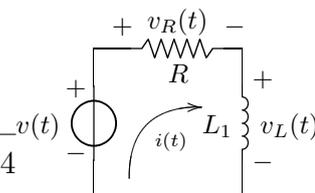
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\left(\frac{s+j\omega - s+j\omega}{s^2 - \omega^2}\right) \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2} \quad (2.29)$$

2.3. Aplicación a circuitos

En un circuito RL de primer orden como el de la Figura 2.1, la ecuación de la malla estará dada por:

$$V(t) = L\frac{\partial i}{\partial t} + i(t)R \quad (2.30)$$



Aplicando la transformación de Laplace a ambos miembros de la ecuación:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\left\{L\frac{\partial i}{\partial t} + i(t)R\right\} \quad (2.31)$$

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = L(sI(s) - i(0^-)) + I(s)R \quad (2.32)$$

Si la entrada es $v(t) = u(t)$, se puede obtener una expresión para la corriente:

$$\frac{1}{s} = I(s)(sL + R) - Li(0^-) \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{s} = I(s)(sL + R) - Li(0^-) \quad (2.34)$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{s} + Li(0^-)}{sL + R} \quad (2.35)$$

$$I(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{sL + R} + \frac{Li(0^-)}{sL + R} \quad (2.36)$$

Cada uno de los términos de $I(s)$ puede anti-transformarse para obtener una expresión para $i(t)$.

Para el primer término:

$$F_1(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{sL + R} = \frac{1}{s} \frac{1}{L(s + \frac{R}{L})} \quad (2.37)$$

$$f_1(t) = \int_0^t \frac{1}{L} - e^{-\frac{R}{L}\tau} d\tau = -\frac{1}{L} \frac{L}{R} - e^{-\frac{R}{L}\tau} \Big|_0^t \quad (2.38)$$

$$= \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) u(t) \quad (2.39)$$

Mientras que para el segundo término:

$$F_2(s) = \frac{Li(0^-)}{sL + R} = \frac{Li(0^-)}{L(s + \frac{R}{L})} \quad (2.40)$$

$$f_2(t) = i(0^-)e^{-\frac{R}{L}t}u(t) \quad (2.41)$$

De manera que la expresión general para $i(t)$ será:

$$i(t) = \left(\left(i(0^-) - \frac{1}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{1}{R} \right) u(t) \quad (2.42)$$

2.4. Cocientes de polinomios

La transformada de Laplace resulta de suma utilidad cuando se tienen expresiones de la forma:

$$F(s) = \frac{a_0s^N + a_1s^{N-1} + \dots + a_n}{b_0s^M + b_1s^{M-1} + \dots + b_m} \quad (2.43)$$

Es decir, un cociente de dos polinomios en s .

En principio, una vez que se obtiene una función de esta forma, se necesita que el orden del numerador sea menor que el orden del denominador, porque de esa manera se puede anti-transformar utilizando las propiedades.

Si $N \geq M$, será necesario reducir el orden del polinomio, efectuando una división de polinomios, de tal manera que:

$$F(s) = K_1 s^{N-M} + K_2 s^{N-M-1} + \dots + K_{N-M} + \frac{K}{b_0 s^M + \dots + b_m} \quad (2.44)$$

Donde K_1 es el resultado del primer cociente, K_2 el resultado del segundo, y K es el resto.

De esta forma, la anti-transformada de $F(s)$ será:

$$f(t) = C_{N-M} \delta(t) + C_{N-M+1} \delta'(t) + \dots + C_1 \delta^{N-M}(t) + \mathcal{L} \left\{ \frac{K}{b_0 s^M + \dots + b_m} \right\} \quad (2.45)$$

En el caso en que $N = M$, también es necesario dividir los polinomios, pero en el resultado habrá una única $\delta(t)$.

Ejemplo

$$F(s) = \frac{2s^3 + 3s^2 + 5s + 2}{s^2 + 3s + 1} \quad (2.46)$$

Dividiendo el numerador por el denominador se obtiene un cociente de $2s - 3$ y un resto de $12s + 5$. De manera que $F(s)$ será:

$$F(s) = 2s - 3 + \frac{12s + 5}{s^2 + 3s + 1} \quad (2.47)$$

Finalmente, cuando $N < M$, es necesario buscar las raíces del denominador, que serán los polos de la transferencia. La función tendrá la forma:

$$F(s) = \frac{N(s)}{s_0(s - s_1) \dots (s - s_M)} \quad (2.48)$$

Donde $N(s)$ es un numerador, un polinomio de orden N .

2.4.1. Raíces reales y diferentes

En el caso en que las raíces $s_0 \dots s_M$ sean todas reales y diferentes, se puede separar la función por el método de fracciones simples, de tal manera que:

$$F(s) = \frac{A}{s - s_1} + \frac{B}{s - s_2} + \dots + \frac{M}{s - s_M} \quad (2.49)$$

Los coeficientes, para tres raíces, se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$A = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)} \quad B = \frac{N(s_2)}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)} \quad C = \frac{N(s_3)}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)} \quad (2.50)$$

Donde $N(s)$ es el numerador y A , B y C son números que no dependen de s .

Ejemplo numérico

$$F(s) = \frac{3}{s^2 + 8s + 15} = \frac{3}{(s+3)(s+5)} \quad (2.51)$$

$$= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+5} \quad (2.52)$$

$$A = \frac{3}{-3+5} = \frac{3}{2} \quad (2.53)$$

$$B = \frac{5}{-5+3} = -\frac{3}{2} \quad (2.54)$$

$$F(s) = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+5} \right) \quad (2.55)$$

$$f(t) = \frac{3}{2} (e^{-3t} + e^{-5t}) u(t) \quad (2.56)$$

Ejemplo en un circuito

Un circuito capacitivo como el de la Figura 2.2, estará caracterizado por las siguientes ecuaciones:

$$V(t) = i(t)R_1 + V_A(t) + \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\tau) d\tau + i(t)R_3 \quad (2.57)$$

$$i(t) = i_{C_1} + i_{R_2} = C_1 \frac{dV_A(t)}{dt} + \frac{V_A}{R_2} \quad (2.58)$$

Donde V_A es la tensión entre los bornes del capacitor C_1 .

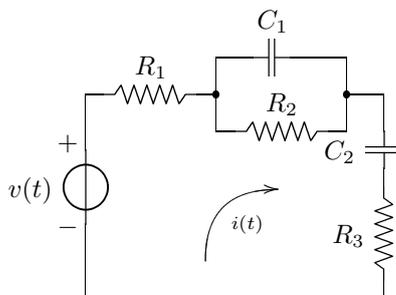


Figura 2.2: Un circuito con raíces reales.

Haciendo la transformada de Laplace en ambas ecuaciones, y operando para

obtener un cociente de polinomios:

$$V(s) = I(s)R_1 + V_A(s) + \frac{1}{sC_2}I(s) + I(s)R_3 \quad (2.59)$$

$$= I(s) \left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3 \right) + V_A(s) \quad (2.60)$$

$$I(s) = sC_1V_A(s) + \frac{V_A}{R_2} \quad (2.61)$$

$$V_A(s) = \frac{I(s)}{sC_1 + \frac{1}{R_2}} \quad (2.62)$$

$$V(s) = I(s) \left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3 \right) + \frac{I(s)}{sC_1 + \frac{1}{R_2}} \quad (2.63)$$

$$V(s) = I(s) \left(R_1 + \frac{1}{sC_2} + R_3 + \frac{1}{sC_1 + \frac{1}{R_2}} \right) \quad (2.64)$$

$$V(s) = I(s) \left(\frac{sC_2R_1 + 1 + sC_2R_3}{sC_2} + \frac{R_2}{sC_1R_2 + 1} \right) \quad (2.65)$$

$$V(s) = I(s) \left(\frac{(sC_2R_1 + 1 + sC_2R_3)(sC_1R_2 + 1) + sC_2R_2}{sC_2(sC_1R_2 + 1)} \right) \quad (2.66)$$

2.4.2. Raíces reales dobles

Si una o más raíces se repiten, se trata de raíces dobles, en lugar de simples. Para hacer la separación en fracciones será necesario tener en cuenta esta situación.

Por ejemplo, para un caso con una raíz doble s_1 y una raíz simple s_2 :

$$F(s) = \frac{A}{(s - s_1)^2} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2} \quad (2.67)$$

En este caso, los coeficientes, se pueden encontrar de la siguiente manera:

$$A = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_2)} \quad B = \frac{\partial}{\partial s} \frac{N(s)}{(s - s_2)} \Big|_{s_1} \quad C = \frac{N(s_2)}{(s_2 - s_1)^2} \quad (2.68)$$

Donde $N(s)$ es el numerador y A , B y C son números que no dependen de s . Para el coeficiente B es necesario hacer la derivada de la función, ya que de ese modo se reduce el orden del polinomio.

En el caso en que hubiera una raíz triple, el procedimiento sería similar, teniendo una fracción con denominador $(s - s_1)^3$, otra con denominador $(s - s_1)^2$ y otra con denominador $(s - s_1)$.

Ejemplo numérico

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2(s+2)} \quad (2.69)$$

$$= \frac{A}{(s+3)^2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+2} \quad (2.70)$$

$$A = \frac{1}{-3+2} = -1 \quad (2.71)$$

$$C = \frac{1}{-2+3} = 1 \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{(s+2)} = -(s+2)^{-2} \quad (2.73)$$

$$B = -(-3+2)^{-2} = -1 \quad (2.74)$$

$$F(s) = -\frac{1}{(s+3)^2} - \frac{1}{s+3} + \frac{1}{s+2} \quad (2.75)$$

$$f(t) = (-te^{-3t} - e^{-3t} + e^{-2t})u(t) \quad (2.76)$$

2.4.3. Raíces complejas conjugadas

Para los circuitos que se estudien en esta materia, siempre que aparezca un polo complejo en una función, aparecerá también su conjugado.

Por ejemplo, para un caso con dos polos s_1 y su conjugado s_1^* :

$$F(s) = \frac{A}{s-s_1} + \frac{B}{s-s_1^*} \quad (2.77)$$

En este caso, el coeficiente A es conjugado de B , es decir $B = A^*$. Además, $s_1 = \sigma_1 + j\omega$ y $s_1^* = \sigma_1 - j\omega$. De esta manera, se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$A = \frac{N(s_1)}{(s_1 - s_1^*)} = \frac{N(s_1)}{2j\omega} \quad (2.78)$$

$$A^* = \frac{N(s_1)}{(s_1^* - s_1)} = -\frac{N(s_1^*)}{2j\omega} \quad (2.79)$$

$$F(s) = \frac{A(s-s_1^*) + A^*(s-s_1)}{(s-s_1)(s-s_1^*)} \quad (2.80)$$

$$= \frac{2A_{\Re}(s-\sigma_1) - 2A_{\Im}\omega_1}{(s-\sigma_1)^2 + \omega_1^2} \quad (2.81)$$

$$= \frac{2A_{\Re}(s-\sigma_1)}{(s-\sigma_1)^2 + \omega_1^2} - \frac{2A_{\Im}\omega_1}{(s-\sigma_1)^2 + \omega_1^2} \quad (2.82)$$

De esta manera, la función $f(t)$ estará dada por:

$$f(t) = 2A_{\Re}e^{\sigma_1 t} \cos(\omega t) - 2A_{\Im}e^{\sigma_1 t} \sin(\omega t) \quad (2.83)$$

$$f(t) = e^{\sigma_1 t} (2A_{\Re} \cos(\omega t) - 2A_{\Im} \sin(\omega t)) \quad (2.84)$$

2.4.4. Diagrama de polos y ceros

Se trata de un diagrama que permite tener una rápida idea de la función que se está analizando. Incluye los polos (raíces del denominador) y los ceros (raíces del numerador).

Por ejemplo, el diagrama de la figura 2.3 podría corresponder a una función $f(t) = 3e^{-3t} + 18e^{-6t}$, o también a una función $g(t) = 1682e^{-3t} + 2815e^{-6t}$.

Figura 2.3: Diagrama de polos y ceros. para $f(t) = e^{-3t} + e^{-6t}$

Figura 2.4: Diagrama de polos y ceros para $f(t) = \cos(\omega t)$.

Figura 2.5: Diagrama de polos y ceros para $\cos(\omega t + \alpha)e^{-At}$.

En el caso de la Figura 2.4, la función será $F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, que se puede antitransformar para obtener la función $f(t) = \cos(\omega t)$. Es decir que todo diagrama de la forma del indicado en esa figura, corresponderá a una función coseno.

Por otro lado, el diagrama de la Figura 2.5, está asociado a la función $F(s) = \frac{s - \alpha}{(s - A)^2 + \omega^2}$, cuya anti transformada será $f(t) = \cos(\omega t + \alpha)e^{-At}$.

Es decir que se trata de una función coseno desplazada y amortiguada. El desplazamiento de los polos implica que se multiplica la función por la exponencial e^{-At} , y el desplazamiento del cero implica un corrimiento en la fase.

Como se deduce de este último ejemplo, al analizar un diagrama de polos y ceros, los polos determinan la forma de la función, mientras que los ceros determinan la fase.

Además, si los polos son puramente imaginarios, se trata de una función sinusoidal cuya amplitud no está modulada por una exponencial. Es decir, cuando los polos son puramente imaginarios se trata de un régimen senoidal permanente.

Polos reales y complejos

Si la función a graficar es de la forma $F(s) = \frac{1}{s+a}$, se trata de un polo en $-a$, pero si la función es de la forma $F(s) = \frac{1}{s^2+bs+c}$, es necesario buscar los ceros del denominador para determinar qué tipo de polos son.

- A) Para hacer este análisis, se puede utilizar otra notación, más apropiada para analizar filtros.

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \tag{2.85}$$

Las raíces de esta ecuación estarán dadas por:

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \tag{2.86}$$

De manera que analizando el término $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2$ es posible determinar el comportamiento general del circuito.

- a) Si $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 > 1$, $Q < 1/2$ y las raíces son reales y negativas.
- b) Si $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 = 1$, $Q = 1/2$ y la raíz será $-\frac{\omega_0}{2Q}$, es decir una raíz doble y negativa.
- c) Si $\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 < 1$, $Q > 1/2$ y las raíces complejas conjugadas, dadas por la siguiente ecuación.

$$s_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0 \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \quad (2.87)$$

Para el caso de polos complejos conjugados, el ángulo θ que formen los polos con el eje de los reales dependerá del valor de Q , cuando el ángulo es de 45 grados, $Q = \sqrt{2}/2$, cuando el ángulo es de 90 grados, $Q \rightarrow \infty$.

Figura 2.6: Circunferencia donde se ubican los polos y ceros complejos

Como puede apreciarse en la Figura 2.6, si Q varía, la distancia del polo al origen permanece constante. Lo único que cambia es la parte real del polo, que en los circuitos analizados solamente puede ser negativa.

Analizar figuras como la Figura 2.6 puede servir como referencia acerca del comportamiento que va a tener un determinado circuito, antes de resolverlo.

- B) Otra notación que también puede utilizarse para analizar esta clase de polinomios es la siguiente.

$$F(s) = \frac{N(s)}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} \quad (2.88)$$

Esta segunda expresión puede también analizarse de la siguiente manera.

$$s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2 = (s + \sigma)^2 - \underbrace{\sigma^2 + \omega_0^2}_{\omega_n^2} = (s + \sigma)^2 + \omega_n^2 \quad (2.89)$$

En el diagrama de polos y ceros, cuando se trata de un polo o cero complejo, σ es la parte real, ω_n es la parte imaginaria y ω_0 es el módulo, es decir $\omega_0^2 = \omega_n^2 + \sigma^2$. Esta relación se ilustra en la Figura 2.7.

Ejemplos numéricos

- 1.

$$F(s) = \frac{3s}{s^2 + 5s + 100} \quad (2.90)$$

Las raíces estarán dadas por:

$$s_{1,2} = -\frac{5 \pm \sqrt{25 - 400}}{2} \quad (2.91)$$

De manera que se trata de dos polos complejos conjugados. Es posible reformular la expresión y a continuación hacer la anti-transformada.

$$F(s) = \frac{3s}{(s+2.5)^2 + 93.75} \quad (2.92)$$

$$F(s) = 3 \frac{(s+2.5) - 2.5}{(s+2.5)^2 + 93.75} \quad (2.93)$$

$$f(t) = 3 \left[e^{-2.5t} \left(\cos \sqrt{93.75}t + \frac{2.5}{\sqrt{93.75}} \sin \sqrt{93.75}t \right) \right] \quad (2.94)$$

$$f(t) = 3e^{-2.5t} \cos \left(\sqrt{93.75}t + \alpha \right) \sqrt{1 + \frac{6.25}{93.75}} \quad (2.95)$$

Donde $\alpha = \arctan \frac{2.5}{\sqrt{93.75}}$

2.

$$F(s) = \frac{s+5}{s^2+4s+25} \quad (2.96)$$

$$= \frac{s+2+3}{(s+2)^2+21} \quad (2.97)$$

$$f(t) = e^{-2t} \left(\cos \sqrt{21}t + \frac{3}{\sqrt{21}} \sin \sqrt{21}t \right) \quad (2.98)$$

3.

$$F(s) = \frac{15}{s^2+10s+144} \quad (2.99)$$

En esta ecuación $\omega_0 = 12$, $\omega_0/Q = 10$, de donde $Q = 1.2 > 0.5$, es decir se trata de polos complejos conjugados, con $|\sigma| = 5$. Es decir que la parte real del polo será de -5 y la parte compleja de $\sqrt{119}$.

4.

$$F(s) = \frac{s^2+16s+16}{s^2+40s+100} \quad (2.100)$$

En primer lugar, analizamos los ceros: $\omega_0 = 4$, $\omega_0/Q = 16$ de donde $Q = 1/4$. Es decir que los ceros son reales y negativos.

Para los polos, además, $\omega_0 = 10$, $\omega_0/Q = 40$ de donde $Q = 1/4$. Es decir que los polos también son reales y negativos.

Los valores de los ceros estarán dados por: $s_{1,2} = -\frac{16 \pm \sqrt{256-64}}{2} = -8 \pm \sqrt{48}$, mientras que los valores de los polos estarán dados por: $s_{1,2} = -\frac{40 \pm \sqrt{1600-400}}{2} = -20 \pm \sqrt{300}$.

2.5. Resolución de circuitos

2.5.1. Impedancias Operacionales

Se llama *impedancia operacional*, a la impedancia que se le otorga a un determinado elemento de circuito cuando se trabaja con la transformada de Laplace. Esta impedancia se obtiene a partir de aplicar la transformada de Laplace a la ecuación que vincula la corriente y la tensión en el elemento.

No se tienen en cuenta las condiciones iniciales, ya que la impedancia operacional se aplica únicamente al régimen permanente.

Resistores

$$v(t) = i(t)R \quad (2.101)$$

$$V(s) = I(s)R \quad (2.102)$$

$$Z_R(s) = R \quad (2.103)$$

Capacitores

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (2.104)$$

$$I(s) = C (sV(s) - V(0)) \quad (2.105)$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC} \quad (2.106)$$

Inductores

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (2.107)$$

$$V(s) = L (I(s) + I(0)) \quad (2.108)$$

$$Z_L(s) = sL \quad (2.109)$$

Al comparar estas impedancias con las utilizadas en el régimen senoidal permanente, resulta claro que $sL \Rightarrow j\omega L$, $1/sC \Rightarrow 1/j\omega C$. Es decir, que si $s = j\omega$ se trata de un régimen senoidal permanente. En el caso en que s tiene parte real, puede tratarse de cualquier régimen. Es decir que, el análisis mediante fasores es un caso particular del análisis utilizando la transformada de Laplace.

2.5.2. Circuito RLC serie

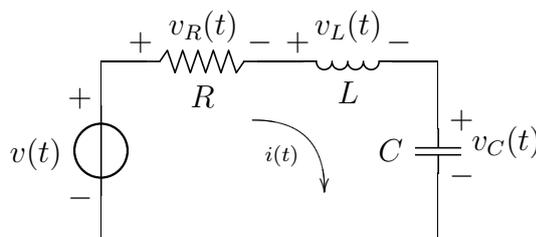


Figura 2.8: Circuito RLC serie.

La transformada de Laplace se puede utilizar para resolver un circuito como el de la Figura 2.8. Para ello, en primer lugar, planteamos el circuito y luego lo transformamos.

$$v(t) = L \frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_C(0) \quad (2.110)$$

$$V(s) = L(sI(s) - I(0)) + RI(s) + \frac{I(s)}{sC} + \frac{V_C(0)}{C} \quad (2.111)$$

$$V(s) = I(s) \left(sL + R + \frac{1}{sC} \right) \underbrace{-LI(0) + \frac{V_C(0)}{C}}_{\text{condiciones iniciales}} \quad (2.112)$$

$$I(s) = V(s) \frac{-LI(0) + \frac{V_C(0)}{C}}{sL + R + \frac{1}{sC}} \quad (2.113)$$

$$I(s) = V(s) \frac{s - LI(0) + \frac{V_C(0)}{C}}{L s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.114)$$

De la ecuación (2.114) se puede ver que los polos para la corriente $I(s)$ tendrán un $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y un $Q = L/R\sqrt{LC}$.

Tomando condiciones iniciales nulas, se puede buscar el valor de la tensión V_R dada por:

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL + R + 1/sC} \quad (2.115)$$

$$V_R(s) = I(s)R \quad (2.116)$$

$$V_R(s) = \frac{V(s)R}{sL + R + 1/sC} \quad (2.117)$$

$$= V(s) \frac{RsC}{s^2LC + sCR + 1} \quad (2.118)$$

$$= V(s) \frac{RsC}{LC \left(s^2 + \frac{sR}{L} + \frac{1}{LC} \right)} \quad (2.119)$$

$$= V(s) \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.120)$$

Para el caso en que $v(t) = u(t)$, se tiene que $V(s) = 1/s$ y

$$V_R(s) = \frac{R}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (2.121)$$

Los polos de esta ecuación son: $s_{1,2} = -\frac{R/L \pm \sqrt{(R/L)^2 - 4/LC}}{2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$.

Además, $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ y $Q = \sqrt{\frac{C}{L}}R$

2.5.3. RLC Paralelo

Para resolver un circuito RLC paralelo como el de la Figura 2.9, se plantea la ecuación de la suma de corrientes.

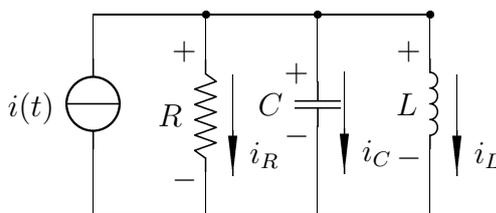


Figura 2.9: Circuito RLC paralelo.

$$I(s) = I_R(s) + I_L(s) + I_C(s) \quad (2.122)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{R} + \frac{V(s)}{sL} + V(s)sC \quad (2.123)$$

$$I(s) = V(s) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC \right) \quad (2.124)$$

Ahora es posible encontrar una expresión para la tensión de salida $V(s)$:

$$V(s) = \frac{I(s)}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} \quad (2.125)$$

$$V(s) = \frac{I(s)sL}{s^2LC + \frac{sL}{R} + 1} \quad (2.126)$$

$$V(s) = \frac{s}{C} \frac{I(s)}{s^2 + \frac{s}{CR} + \frac{1}{LC}} \quad (2.127)$$

Si la fuente de corriente es $i(t) = u(t)$, $I(s) = 1/s$, y se toman condiciones iniciales nulas, $V(s)$ será:

$$V(s) = \frac{1}{C} \frac{1}{s^2 + \frac{s}{CR} + \frac{1}{LC}} \quad (2.128)$$

Los polos de esta expresión, serán tales que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y $Q = RC/\sqrt{LC}$.

2.5.4. Circuito con un amplificador operacional

De la misma manera, se puede aplicar la transformada de Laplace para resolver circuitos más complejos como el de la Figura 2.10.

Se plantean las ecuaciones para cada uno de los nodos del circuito.

$$V^-) \quad V_B(s) = V_O(s) \frac{R_4}{R_4 + R_3} = V_O(s) K_1 \quad (2.129)$$

$$V^+) \quad 0 = V_B(s) \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right) - V_A(s) sC_2 \quad (2.130)$$

$$V^A) \quad 0 = V_A \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} \right) - V_I(s) sC_1 - \frac{V_O(s)}{R_1} - V_B(s) sC_2 \quad (2.131)$$

Se puede buscar una expresión para $V_A(s)$.

$$V_A(s) sC_2 = V_O(s) K_1 \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.132)$$

$$V_A(s) = V_O(s) \frac{K_1 \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right)}{sC_2} \quad (2.133)$$

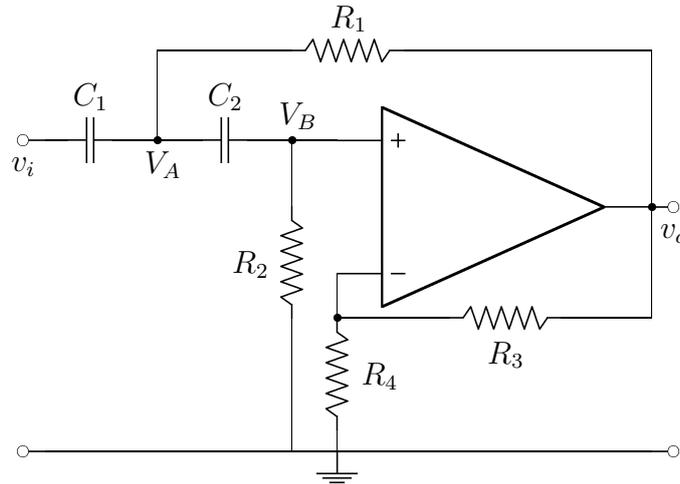


Figura 2.10: Circuito de segundo orden.

Y se busca la expresión para $V_O(s)$ en función de $V_I(s)$.

$$V_I(s)sC_1 = V_A(s) \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} \right) - V_O(s) \left(\frac{1}{R_1} - K_1sC_2 \right) \quad (2.134)$$

$$V_I(s)sC_1 = V_O(s) \left(\frac{K_1 \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right)}{sC_2} \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} + K_1sC_2 \right) \quad (2.135)$$

$$V_O(s) = \frac{V_I(s)sC_1}{\frac{K_1 \left(sC_2 + \frac{1}{R_2} \right)}{sC_2} \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} \right) - \frac{1}{R_1} + K_1sC_2} \quad (2.136)$$

2.6. Transferencia operacional

La transferencia está dada por:

$$T(s) = \frac{V_S(s)}{V(s)} \quad (2.137)$$

Donde $V(s)$ es la tensión de entrada y $V_S(s)$ es la tensión de salida.

Al hablar de transferencia **no se tienen en cuenta las condiciones iniciales**, ya que solamente se tiene en cuenta el régimen permanente.

Si $V(s) = 1$ (un impulso) la respuesta dependerá únicamente del circuito, no se puede establecer una transferencia.

Las transferencias serán siempre un cociente de dos polinomios con variable s .

Por el teorema de la convolución, si se tiene la transferencia $T(s)$ de un circuito, se puede obtener la transferencia $T(t)$ del circuito y convolucionarla con la función de entrada para obtener la salida.

2.6.1. Divisor de tensión

Si se tiene un divisor de tensión como el de la Figura 2.11, donde las impedancias son $Z_1(s)$ y $Z_2(s)$ (es decir, pueden ser capacitivas, inductivas y/o resistivas), la transferencia sobre Z_2 estará dada por

$$T(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (2.138)$$

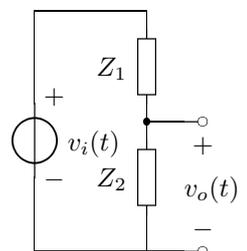


Figura 2.11: Un divisor de tensión de

Capítulo 3

Diagramas de Bode

Trabajar el módulo de una transferencia que se ha transformado mediante la transformada de Laplace es muy incómodo. Por ese motivo, se utilizan los **diagramas de Bode de respuesta en frecuencia**, basados en la utilización de logaritmos para la representación gráfica.

3.1. Expresión de la transferencias

Para poder realizar los diagramas de Bode, la transferencia $T(s)$ del circuito, debe expresarse como el cociente de dos polinomios en s , como ilustra la ecuación (3.2).

$$T(s) = H \frac{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}{s^m + b_1 s^{m-1} + b_2 s^{m-2} + \dots + b_m} \quad (3.1)$$

$$T(s) = H \frac{(s - Z_1)(s - Z_2) \dots (s - Z_n)}{(s - P_1)(s - P_2) \dots (s - P_m)} \quad (3.2)$$

Donde Z_1, \dots, Z_n son los ceros de la transferencia y P_1, \dots, P_m son los polos de la transferencia.

Además, se impone la condición de que s es una variable puramente imaginaria, es decir, $s = j\omega$, esto se debe a que cuando los valores de s son imaginarios, se trata del régimen senoidal permanente, como se explicó en la Sección 2.4.4. Y siempre que se busque la *respuesta en frecuencia* de un circuito, se está trabajando con régimen senoidal permanente.

En este caso, la transferencia será

$$T(j\omega) = H \frac{(j\omega - Z_1)(j\omega - Z_2) \dots (j\omega - Z_n)}{(j\omega - P_1)(j\omega - P_2) \dots (j\omega - P_m)} \quad (3.3)$$

A continuación se expresa en logaritmos, para poder realizar el análisis.

$$\begin{aligned} \log |T(j\omega)| &= \log |H| + \log \left| \frac{j\omega}{Z_1} - 1 \right| + \dots + \log \left| \frac{j\omega}{Z_n} - 1 \right| \\ &\quad - \log \left| \frac{j\omega}{P_1} - 1 \right| - \dots - \log \left| \frac{j\omega}{P_m} - 1 \right| \end{aligned} \quad (3.4)$$

Finalmente, se normaliza esta expresión para obtenerla en dB.

$$20 \log |T(j\omega)| = 20 \log |H| + 20 \log \left| \frac{j\omega}{Z_1} - 1 \right| + \dots + 20 \log \left| \frac{j\omega}{Z_n} - 1 \right| - 20 \log \left| \frac{j\omega}{P_1} - 1 \right| - \dots - 20 \log \left| \frac{j\omega}{P_m} - 1 \right| \quad (3.5)$$

3.2. Diagramas básicos

3.2.1. Diagrama para un polo

Si la transferencia es de la forma $T(s) = \frac{1}{s-P_1}$, el gráfico a realizar corresponderá a

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\left| \frac{j\omega}{P_1} - 1 \right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{P_1}\right)^2 + 1}} \quad (3.6)$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = -20 \log \sqrt{\left(\frac{\omega}{P_1}\right)^2 + 1} = -10 \log \left(\frac{\omega^2}{P_1^2} + 1 \right) \quad (3.7)$$

De manera que se pueden plantear dos rectas asíntotas para cuando $\omega \rightarrow 0$ (frecuencias bajas) y $\omega \rightarrow \infty$ (frecuencias altas).

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 0 \quad (3.8)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = -10 \log \frac{\omega^2}{P_1^2} \quad (3.9)$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = -20 \log \omega + 20 \log P_1 \quad (3.10)$$

Al graficar la transferencia $T(j\omega)$ (en dB) en función de ω (en escala logarítmica), vemos que se trata de dos rectas, una horizontal en 0, y la otra diagonal, con pendiente $-20dB$.

Para realizar el gráfico de Bode, se decide la siguiente regla: *a partir del punto en que las dos asíntotas se cruzan, hacia atrás vale la horizontal, y hacia adelante la diagonal.*

La Figura 3.1 muestra el típico Diagrama de Bode para una función con un polo, que en este caso se encuentra en $\omega = 10$.

Como se puede ver, el diagrama asíntótico se aproxima mucho al real, excepto alrededor del polo. La distancia máxima entre ambos diagramas es en el punto $\omega = 10$, donde hay una separación de $3dB$.

3.2.2. Diagrama para un cero

Si la transferencia es de la forma $T(s) = s-Z_1$, el gráfico a realizar corresponderá a

$$|T(j\omega)| = |j\omega - Z_1| = \sqrt{\omega^2 + Z_1^2} \quad (3.11)$$

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log \sqrt{\omega^2 + Z_1^2} = 10 \log (\omega^2 + Z_1^2) \quad (3.12)$$

Del mismo modo que con el polo, se pueden plantear dos rectas asíntotas para cuando $\omega \rightarrow 0$ (frecuencias bajas) y $\omega \rightarrow \infty$ (frecuencias altas).

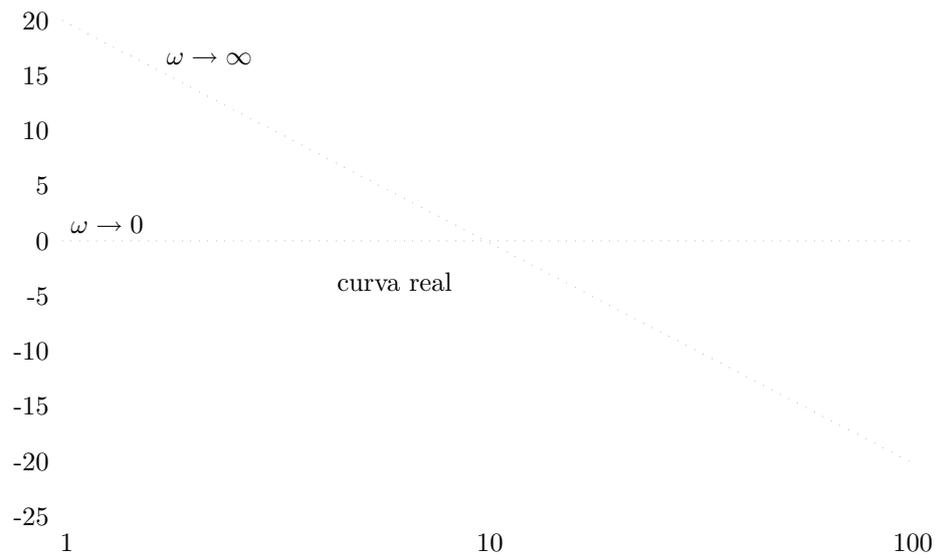


Figura 3.1: Diagrama de Bode para una función con un polo en $\omega = 10$.

$$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20 \log Z_1 \quad (3.13)$$

$$\omega \rightarrow \infty \Rightarrow |T(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega \quad (3.14)$$

Al graficar la transferencia $T(j\omega)$ (en dB) en función de ω (en escala logarítmica), vemos que se trata de dos rectas, una horizontal en $|Z_1|_{dB}$, y la otra diagonal, con pendiente $20dB$.

Para realizar el gráfico de Bode, se utiliza la misma regla mencionada anteriormente.

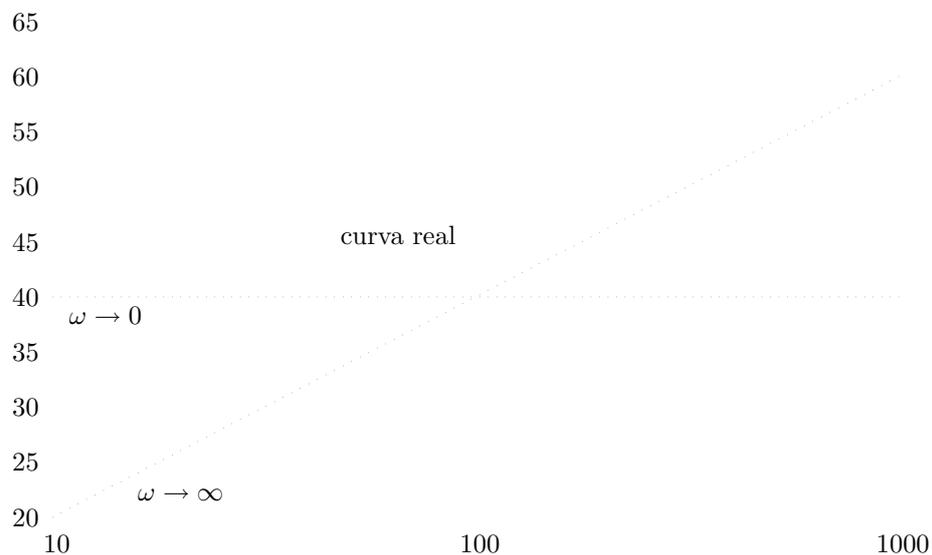


Figura 3.2: Diagrama de Bode para una función con un cero en $\omega = 100$.

La Figura 3.2 muestra el típico Diagrama de Bode para una función con un cero, que en este caso se encuentra en $\omega = 100$. Se puede observar que la transferencia aumenta a partir del cero, y que por otro lado el cero impone un valor mayor de transferencia para $\omega \rightarrow 0$.

Como se puede ver, el diagrama asintótico se aproxima mucho al real, excepto alrededor del cero. La distancia máxima entre ambos diagramas es en el punto

$\omega = 100$, donde hay una separación de $3dB$.

A partir de un polo, la transferencia del circuito siempre disminuye, a partir de un cero, la transferencia aumenta.

3.3. Combinación de diagramas

Una transferencia $T(s)$ puede expresarse como el producto de varias transferencias $T_1(s)$, $T_2(s)$, etc. De forma tal que el diagrama es una combinación de las rectas asintóticas correspondientes a cada una de las transferencias.

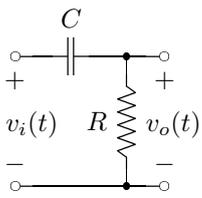
Capítulo 4

Filtros

4.1. Circuitos con capacitores y resistores

4.1.1. Circuito pasa altos de primer orden

Utilizando la ecuación (2.138), se puede encontrar muy fácilmente la transferencia para un circuito como el de la Figura 4.1.



$$T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} \quad (4.1)$$

$$T(s) = RC \frac{s}{sCR + 1} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} \quad (4.2)$$

Se trata de un circuito con un cero en $\omega = 0$ y un polo en $\omega = 1/RC$.

Figura 4.1: Un circuito RC pasa altos.

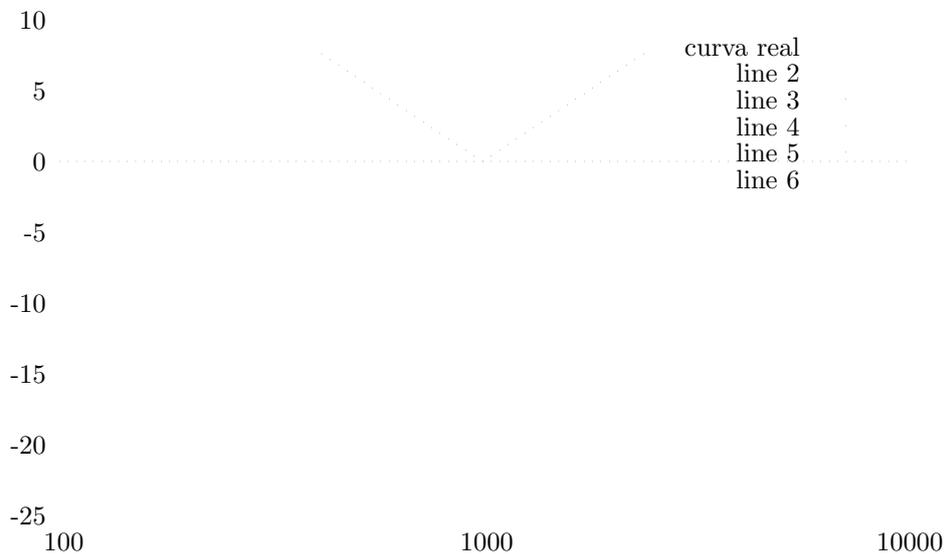


Figura 4.2: Diagrama de Bode para un circuito pasa altos, con $1/RC = 1000$

La Figura 4.2 muestra el diagrama de Bode del circuito. Se lo denomina **pasa altos**, porque es un circuito que permite ver un valor apreciable a la salida solamente cuando ω es alta. Este circuito es un pasa altos de primer orden, ya que tiene un cero y un polo.

En particular, para frecuencias mayores a la frecuencia $1/RC$ la salida es igual a la entrada, y a frecuencias bajas la salida es prácticamente nula.

Todo circuito que tenga la misma cantidad de ceros que de polos será un circuito pasa altos.

Otro circuito pasa altos

El circuito de la Figura 4.3 es también un circuito pasa altos, pero con dos resistores.

Antes de realizar los cálculos de la transferencia, se puede analizar el circuito por sus componentes, teniendo en cuenta que en continua un capacitor cargado se comporta como un circuito abierto, mientras que a frecuencias altas un capacitor se comporta como un cable.

A simple vista, entonces, se puede analizar que la salida con $\omega \rightarrow 0$ será la salida de un típico divisor resistivo, mientras que la salida con $\omega \rightarrow \infty$ será equivalente a la del circuito anterior, es decir 0.

Para el cálculo de la transferencia, se plantean las ecuaciones como antes, pero teniendo el cuidado de calcular la impedancia operacional Z_1 primero.

$$Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC} = \frac{R_1}{1 + sCR_1} \quad (4.3)$$

$$T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + sCR_1}} \quad (4.4)$$

$$T(s) = \frac{R_2(1 + sCR_1)}{R_2(1 + sCR_1) + R_1} = \frac{R_2(1 + sCR_1)}{R_2 + sCR_1R_2 + R_1} \quad (4.5)$$

$$T(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + sCR_1}{\frac{sCR_1R_2}{R_1 + R_2} + 1} \quad (4.6)$$

$$T(s) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{CR_1(R_1 + R_2)}{CR_1R_2} \frac{\frac{1}{CR_1} + s}{s + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}} = \frac{s + \frac{1}{CR_1}}{s + \frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}} \quad (4.7)$$

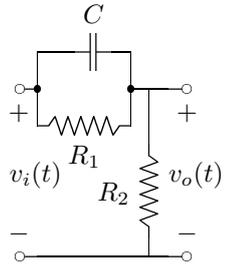


Figura 4.3: Un circuito RC pasa altos más complejo.

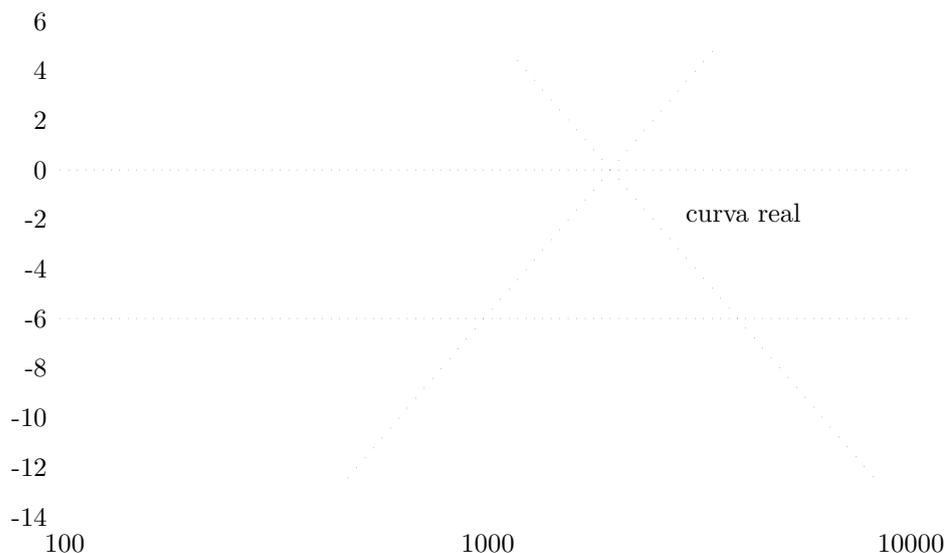


Figura 4.4: Diagrama de Bode para un circuito pasa altos, con $R_1 = R_2 = R$ y $1/RC = 1000$

El cero de la transferencia está ubicado en $\omega = -\frac{1}{CR_1}$, mientras que el polo

está ubicado en $\omega = -\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}$. La diferencia principal entre este circuito y el anterior es que el cero se ha desplazado, con lo cual la salida para $\omega \leftarrow 0$ no es cero.

El diagrama 4.4 muestra el comportamiento de este circuito. Como se había predicho, la salida para frecuencias bajas es de un valor constante ($\frac{R_2}{R_1+R_2}$), y a frecuencias altas la salida es igual a la entrada.

Al mirar este gráfico, es claro que el cero se encuentra antes que el polo, no es necesario resolver ninguna ecuación para llegar a esa conclusión.

Es interesante notar que la recta asíntota tiene una pendiente de $20dB$ por década ($|T(s)|$ aumenta $20dB$ cuando ω aumenta 10 veces su valor), que es equivalente a $6dB$ por octava ($|T(s)|$ aumenta $6dB$ cuando ω aumenta 2 veces su valor).

Por otro lado, podemos generalizar el comportamiento de los circuitos de primer orden con n resistores y 1 capacitor: el polo estará ubicado el la inversa de la constante de tiempo del capacitor y la resistencia equivalente que se mide entre los bornes del capacitor.

4.1.2. Circuito pasa bajos de primer orden

Nuevamente, utilizando la ecuación (2.138), se puede encontrar muy fácilmente la transferencia para un circuito como el de la Figura 4.5.

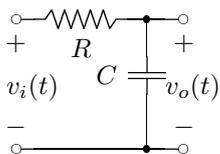


Figura 4.5: Un circuito RC pasa bajos.

$$T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{sC} \frac{1}{R + \frac{1}{sC}} \quad (4.8)$$

$$T(s) = \frac{1}{sCR + 1} \quad (4.9)$$

Se trata de un circuito con un solo polo en $\omega = 1/RC$, cuya transferencia será como la graficada en la Figura 3.1.

A este tipo de circuitos se los denomina **pasa bajos**, ya que se trata de un circuito que permite ver un valor apreciable a la salida solamente cuando ω es pequeña. Este circuito es un pasa bajos de primer orden, ya que tiene un solo polo.

En particular, para frecuencias menores a la frecuencia $1/RC$ la salida es igual a la entrada, y a frecuencias altas la salida es prácticamente nula.

Otro circuito pasa bajos

La Figura 4.6 muestra otro circuito pasa bajos. En este caso, a simple vista puede analizarse que a bajas frecuencias la salida será igual a la entrada y a altas frecuencias, será la salida de un divisor resistivo.

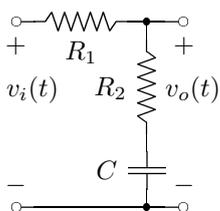


Figura 4.6: Otro circuito RC pasa bajos.

$$T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{sC} + R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{sC}} \quad (4.10)$$

$$T(s) = \frac{sCR_2 + 1}{sC(R_1 + R_2) + 1} \quad (4.11)$$

El circuito tiene un cero en $\omega_Z = \frac{1}{R_2C}$ y un polo en $\omega_P = \frac{1}{C(R_1+R_2)}$. Es claro que $\omega_P < \omega_Z$.

En los circuitos pasabajos con un cero y un polo, el polo debe encontrarse siempre antes que el cero.

4.1.3. Circuito pasa banda de segundo orden

Un circuito pasa banda como el ilustrado en la Figura 4.7, deberá tener dos polos, ya que cuenta con dos elementos almacenadores de energía.

Por otro lado, puede verse que tanto en $\omega \rightarrow 0$ como en $\omega \rightarrow \infty$ la salida será igual a la entrada, mientras que en algún rango de frecuencias habrá cierta atenuación a la salida.

No es posible que haya amplificación, ya que al no haber amplificadores, la salida nunca puede ser mayor que la entrada.

Nuevamente, se utiliza la ecuación (2.138) para calcular la transferencia de este circuito.

$$T(s) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{1}{sC_2} + R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2} + \frac{R_1}{1+sC_1R_1}} \quad (4.12)$$

$$T(s) = \frac{sC_2R_2 + 1}{sC_2R_2 + 1 + \frac{sR_1C_2}{1+sC_1R_1}} \quad (4.13)$$

$$T(s) = \frac{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1)}{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1) + sR_1C_2} \quad (4.14)$$

$$T(s) = \frac{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1)}{s^2C_2R_2C_1R_1 + sC_2R_2 + sC_1R_1 + 1 + sR_1C_2} \quad (4.15)$$

$$T(s) = C_2R_2C_1R_1 \frac{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1)}{s^2 + s \frac{C_2R_2 + C_1R_1 + R_1C_2}{C_2R_2C_1R_1} + \frac{1}{C_2R_2C_1R_1}} \quad (4.16)$$

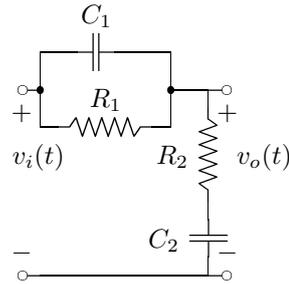


Figura 4.7: Un circuito pasa banda de segundo orden.

Se trata de un circuito con dos ceros y dos polos. Los dos ceros están en $\omega_1 = 1/R_1C_1$ y $\omega_2 = 1/R_2C_2$. Los polos, por otro lado, tienen un $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C_2R_2C_1R_1}}$ y un $Q = \frac{\sqrt{C_2R_2C_1R_1}}{C_2(R_1+R_2)+C_1R_1}$. De manera que no importa los valores que tengan los resistores y los capacitores, $Q < 0.5$ siempre, es decir que, los polos serán siempre reales.

4.2. Circuitos con amplificadores operacionales

La utilización de amplificadores operacionales en la construcción de filtros, provee muchas opciones adicionales. Permite invertir polos y ceros, obtener una salida amplificada, que la salida sea la derivada o la integral de la entrada, etc.

Es posible obtener comportamientos bastante complejos con circuitos muy sencillos.

Mientras se opere a valores de frecuencia menores a 1 o 2 MHz, no es necesario utilizar inductores, dado que son grandes y caros con respecto a los capacitores, siempre que sea posible se utilizan capacitores.

4.2.1. Filtro derivador

$$I_R(s) = I_C(s) \quad (4.17)$$

$$-\frac{V_O(s)}{R} = V_I(s)sC \quad (4.18)$$

$$V_O(s) = -V_I(s)sRC = -RC(sV_I(s)) \quad (4.19)$$

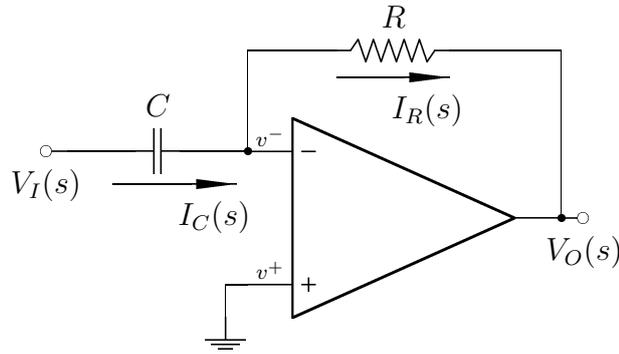


Figura 4.8: Circuito derivador.

Recordando la propiedad de la derivada para la transformada de Laplace, dada por la ecuación (2.13), resulta claro que la salida de este circuito es la derivada de la entrada, excepto por una constante de proporcionalidad.

Por otro lado, la transferencia del circuito será:

$$T(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = -RCs \quad (4.20)$$

4.2.2. Filtro integrador

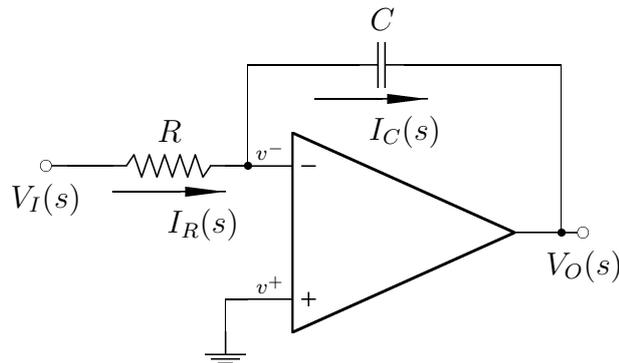


Figura 4.9: Circuito integrador.

$$I_R(s) = I_C(s) \quad (4.21)$$

$$\frac{V_I(s)}{R} = -V_O(s)sC \quad (4.22)$$

$$V_O(s) = -\frac{V_I(s)}{sRC} = \frac{-1}{RC} \left(\frac{V_I(s)}{s} \right) \quad (4.23)$$

Recordando la propiedad de la integral para la transformada de Laplace, dada por la ecuación (2.17), resulta claro que la salida de este circuito es la integral de la entrada, excepto por una constante de proporcionalidad.

Por otro lado, la transferencia del circuito será:

$$T(s) = \frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{-1}{RCs} \quad (4.24)$$

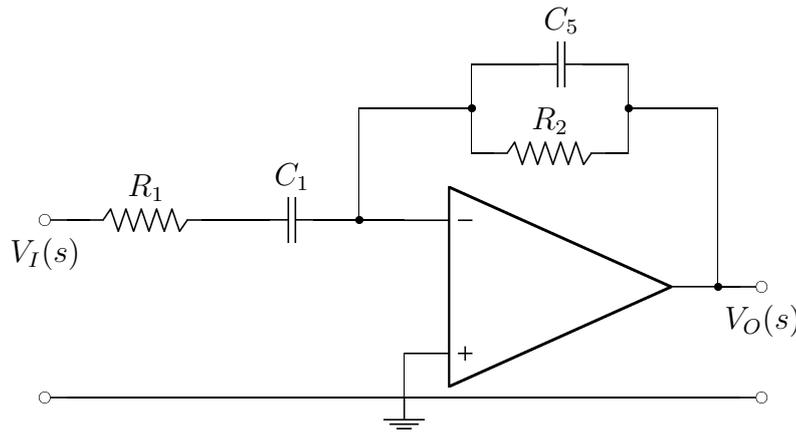


Figura 4.10: Un circuito pasa banda.

4.2.3. Filtro pasa banda

$$Z_2 = \frac{R_2}{sC_2R_2 + 1} \quad (4.25)$$

$$Z_1 = \frac{R_1sC_1 + 1}{sC_1} \quad (4.26)$$

$$T(s) = \frac{-Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{sC_2R_2 + 1} \frac{sC_1}{sC_1R_1 + 1} \quad (4.27)$$

$$T(s) = \frac{sC_1R_2}{(sC_2R_2 + 1)(sC_1R_1 + 1)} \quad (4.28)$$

Se trata de un pasabanda, ya que el número de ceros es la mitad que el número de polos.

Es importante notar que no se puede utilizar un circuito que tenga un polo en cero para la impedancia que relaciona el nodo de salida (V_O) con el nodo de control (V^-). Es decir que siempre tiene que haber un resistor entre el nodo de control y el de salida.

4.2.4. Filtro con realimentación múltiple - Sallen y Key

A partir del circuito de la Figura 4.11 es posible elaborar una gran cantidad de filtros, eligiendo dónde tendrán los polos y los ceros, según los componentes que se coloquen en el circuito.

Es necesario obtener una expresión genérica para la transferencia. Para ello, se define:

$$K = \frac{V_O(s)}{V_B(s)} = \frac{R_{K1} + R_{K2}}{R_{K2}} \quad (4.29)$$

De manera que la amplificación del operacional está definida por los valores de R_{K1} y R_{K2} . Esto es lo que caracteriza a los filtros Sallen y Key.

Se plantean las ecuaciones de los nodos:

$$V_A) \quad 0 = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)V_A(s) - Y_1V_I(s) - Y_3V_B(s) - Y_2V_O(s) \quad (4.30)$$

$$V_B) \quad 0 = (Y_3 + Y_4 + Y_6)V_B(s) - Y_3V_A(s) - Y_6V_O(s) \quad (4.31)$$

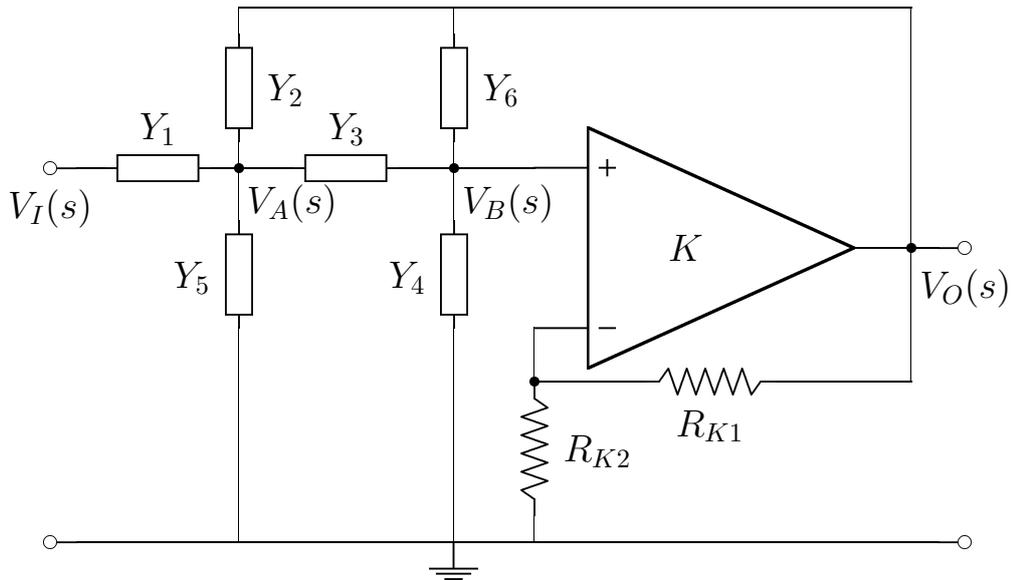


Figura 4.11: Un circuito genérico, con realimentación múltiple.

Y se resuelve:

$$Y_3 V_A(s) = (Y_3 + Y_4 + Y_6) \frac{V_O(s)}{K} - Y_6 V_O(s) \quad (4.32)$$

$$V_A(s) = \frac{V_O(s)}{Y_3} \left(\frac{1}{K} (Y_3 + Y_4 + Y_6) - Y_6 \right) \quad (4.33)$$

$$Y_1 V_I(s) = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) V_A(s) - Y_3 \frac{V_O(s)}{K} - Y_2 V_O(s) \quad (4.34)$$

$$Y_1 V_I(s) = (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) \left(\frac{V_O(s)}{Y_3} \left(\frac{1}{K} (Y_3 + Y_4 + Y_6) - Y_6 \right) \right) \quad (4.35)$$

$$- V_O(s) \left(\frac{Y_3}{K} - Y_2 \right) \quad (4.36)$$

$$Y_1 V_I(s) = V_O(s) \left(\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5}{Y_3} \left(\frac{Y_3 + Y_4 + Y_6}{K} - Y_6 \right) - \frac{Y_3}{K} - Y_2 \right) \quad (4.37)$$

$$V_O(s) = \frac{V_I(s) Y_1}{\frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5}{Y_3} \left(\frac{Y_3 + Y_4 + Y_6}{K} - Y_6 \right) - \frac{Y_3}{K} - Y_2} \quad (4.38)$$

Operando sobre el denominador:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{Y_1}{\frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)(Y_3 + Y_4 + Y_6 - KY_6)}{KY_3} - \frac{Y_3^2 + Y_2 Y_3 K}{KY_3}} \quad (4.39)$$

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{KY_3 Y_1}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)(Y_3 + Y_4 + Y_6 - KY_6) - Y_3^2 - Y_2 Y_3 K} \quad (4.40)$$

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{KY_3 Y_1}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)(Y_3 + Y_4 + Y_6 - KY_6) - Y_3^2 - Y_2 Y_3 K} \quad (4.41)$$

De manera que la transferencia será:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{KY_3 Y_1}{(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5)(Y_3 + Y_4 + Y_6) - Y_3^2 - K(Y_6(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) + Y_2 Y_3)} \quad (4.42)$$

Si todos los componentes son resistores, las admitancias son números reales, y la transferencia también. Pero utilizando algunos capacitores, se tendrán algunas variables del tipo sC que permiten introducir ceros o polos según corresponda.

Construcción de un filtro pasa bajos

Se busca un filtro pasabajos que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (4.43)$$

1. En primer lugar, se seleccionan $Y_3 = 1/R_3$ y $Y_1 = 1/R_1$ para que la transferencia no tenga ceros.
2. A continuación se elimina Y_6 para simplificar la ecuación:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{K G_3 G_1}{(G_1 + Y_2 + G_3 + Y_5)(G_3 + Y_4) - G_3^2 - K(Y_2 G_3)} \quad (4.44)$$

3. Luego, se eligen $Y_2 = sC_2$ y $Y_4 = sC_4$ para obtener un término en s^2 .
4. Y finalmente se elimina Y_5 para simplificar la ecuación.

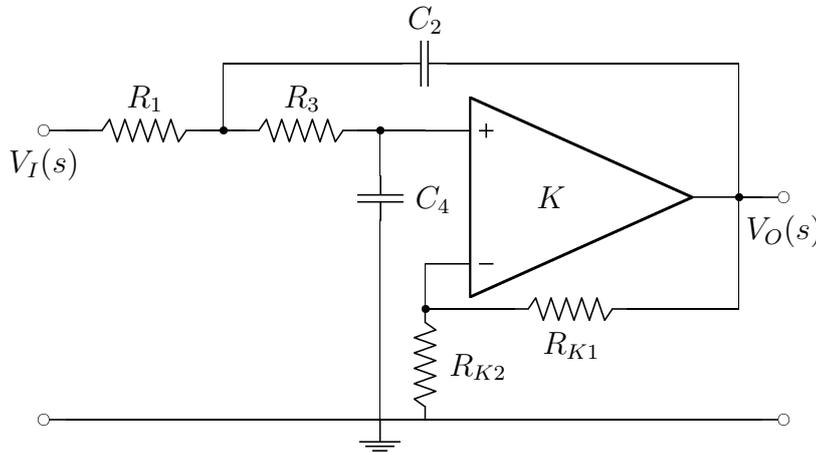


Figura 4.12: Un pasa bajos Sallen y Key.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.12, es:

$$T(s) = \frac{K G_3 G_1}{(G_1 + sC_2 + G_3)(G_3 + sC_4) - G_3^2 - K s C_2 G_3} \quad (4.45)$$

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{K G_3 G_1}{G_1 G_3 + sC_2 G_3 + G_1 sC_4 + s^2 C_2 C_4 + G_3 sC_4 - K s C_2 G_3} \quad (4.46)$$

$$T(s) = \frac{K G_3 G_1}{s^2 C_2 C_4 + s(C_2 G_3 + C_4 G_1 + C_4 G_3 - K C_2 G_3) + G_1 G_3} \quad (4.47)$$

$$T(s) = \frac{K G_3 G_1}{C_2 C_4} \frac{1}{s^2 + s \left(\frac{G_1}{C_2} + \frac{G_3}{C_2} + \frac{G_3}{C_4} (1 - K) \right) + \frac{G_1 G_3}{C_2 C_4}} \quad (4.48)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_1 G_3}{C_2 C_4}} = \sqrt{\frac{1}{C_2 C_4 R_1 R_3}} \quad (4.49)$$

$$Q = \frac{C_2 C_4}{C_4 G_1 + G_3 (C_4 + C_2 (1 - K))} \sqrt{\frac{G_1 G_3}{C_2 C_4}} \quad (4.50)$$

Son dos ecuaciones con cuatro incógnitas, hay infinitos juegos de valores que las satisfacen.

Para poder resolverlo de una forma más sencilla, se supone $R_1 = R_3 = R$ y $C_2 = C_4 = C$, de manera que quedan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (4.51)$$

$$Q = \frac{C^2}{2C/R + C/R(1-K)} \frac{1}{RC} = \frac{1}{3-K} \quad (4.52)$$

Es decir que se pueden manejar ω_0 y Q independientemente.

Según se elija el factor K , que se construye a partir de la ecuación (4.29), se podrán obtener distintos resultados: polos reales y diferentes, polo real doble o polos complejos conjugados.

Los valores que se elijan para R y C tendrán que ver con la cantidad de corriente y tensión que pueda dar la fuente y con el amplificador operacional utilizado y la resistencia de entrada que admita.

Es importante notar que, dado que $Q = 1/3 - K$, el valor de K debe ser menor que 3, porque sino el sistema pasaría a ser inestable.

Si $K = 3$ y la entrada es 0, el circuito empieza a oscilar. Incrementando el valor de K , el circuito incrementa su oscilación hasta que llega al máximo provisto por la batería del amplificador operacional.

Construcción de un filtro pasa banda

Se busca un filtro pasa banda que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0 \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (4.53)$$

1. En primer lugar, se seleccionan una de las admitancias del numerador (Y_3 o Y_1) como capacitiva, de manera que haya un cero en el numerador. Por simplificar las cuentas, se elige $Y_3 = sC_3$ y $Y_1 = 1/R_1$.
2. A continuación se elimina Y_6 para simplificar la ecuación:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{K s C_3 G_1}{(G_1 + Y_2 + s C_3 + Y_5)(s C_3 + Y_4) - (s C_3)^2 - K (Y_2 s C_3)} \quad (4.54)$$

3. Luego se elige $Y_5 = sC_5$, no se puede elegir $Y_4 = sC_4$ porque no habría forma de cargar el capacitor. Es necesario cumplir con la ecuación, pero también con la situación eléctrica.
4. Y finalmente se toman $Y_2 = 1/R_2$ y $Y_4 = 1/R_4$.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.13, es:

$$T(s) = \frac{K s C_3 G_1}{(G_1 + G_2 + s C_3 + s C_5)(s C_3 + G_4) - (s C_3)^2 - K (G_2 s C_3)} \quad (4.55)$$

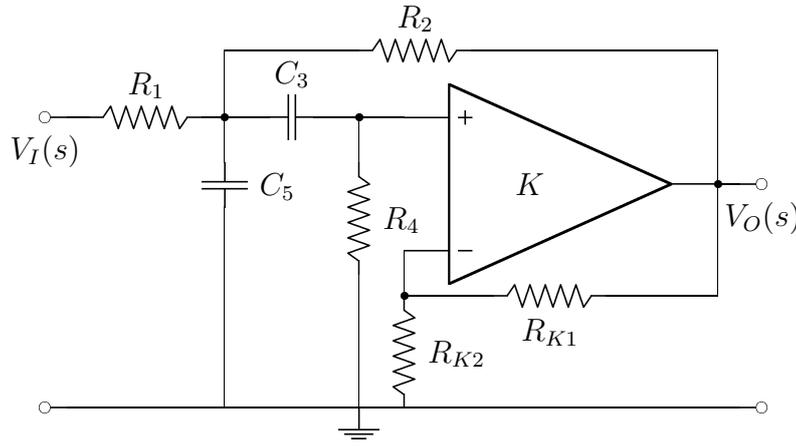


Figura 4.13: Un pasa banda Sallen y Key.

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{KsC_3G_1}{sC_3G_1 + sC_3G_2 + s^2C_3C_5 + G_4G_1 + G_4G_2 + sG_4C_3 + sG_4C_5 - sKG_2C_3} \quad (4.56)$$

$$T(s) = \frac{KsC_3G_1}{s^2C_3C_5 + s(C_3G_1 + C_3G_2 + G_4C_3 + G_4C_5 - KG_2C_3) + G_4(G_1 + G_2)} \quad (4.57)$$

$$T(s) = \frac{KC_3G_1}{C_3C_5} \frac{s}{s^2 + s \left(\frac{G_1 + G_2(1-K) + G_4}{C_5} + \frac{G_4}{C_3} \right) + \frac{G_4(G_1 + G_2)}{C_3C_5}} \quad (4.58)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_4(G_1 + G_2)}{C_3C_5}} \quad (4.59)$$

$$Q = \frac{C_3C_5}{C_3(G_1 + G_2(1-K) + G_4) + G_4C_5} \sqrt{\frac{G_4(G_1 + G_2)}{C_3C_5}} \quad (4.60)$$

Nuevamente, para poder resolver estas ecuaciones de una forma más sencilla, se supone $R_1 = R_2 = R_4 = R$ y $C_3 = C_5 = C$, de manera que quedan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC} \quad (4.61)$$

$$Q = \frac{C^2}{\frac{C}{R}(1 + 1 - K + 1) + \frac{C}{R}} \frac{\sqrt{2}}{RC} = \frac{\sqrt{2}}{4 - K} \quad (4.62)$$

El valor de ω_0 es otra vez definido por los valores de los componentes, mientras que el valor de Q es definido por el factor de amplificación del amplificador operacional.

Construcción de un filtro pasa altos

Se busca un filtro pasa altos que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (4.63)$$

1. Es necesario que $Y_3 = sC_3$ y que $Y_1 = sC_1$ ya que se necesita un cero doble.

2. A continuación se elimina Y_6 para simplificar la ecuación:

$$\frac{V_O(s)}{V_I(s)} = \frac{K s^2 C_3 C_1}{(s C_1 + Y_2 + s C_3 + Y_5)(s C_3 + Y_4) - (s C_3)^2 - K (Y_2 s C_3)} \quad (4.64)$$

3. Se elimina Y_5 por simplicidad.

4. Y finalmente se toman $Y_2 = 1/R_2$ y $Y_4 = 1/R_4$.

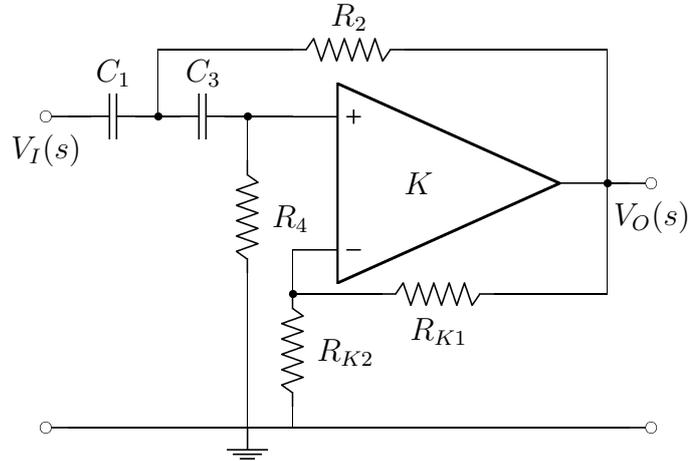


Figura 4.14: Un pasa altos Sallen y Key.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.14, es:

$$T(s) = \frac{K s^2 C_3 C_1}{(s C_1 + G_2 + s C_3)(s C_3 + G_4) - (s C_3)^2 - K (G_2 s C_3)} \quad (4.65)$$

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{K s^2 C_3 C_1}{s^2 C_3 C_1 + s C_3 G_2 + s C_1 G_4 + G_2 G_4 + s C_3 G_4 - K s G_2 C_3} \quad (4.66)$$

$$T(s) = \frac{K s^2 C_3 C_1}{s^2 C_3 C_1 + s (C_3 G_2 (1 - K) + C_1 G_4 + C_3 G_4) + G_2 G_4} \quad (4.67)$$

$$T(s) = K \frac{s^2}{s^2 + s \left(\frac{G_2(1-K)+G_4}{C_1} + \frac{G_4}{C_3} \right) + \frac{G_2 G_4}{C_3 C_1}} \quad (4.68)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_4 G_2}{C_3 C_1}} \quad (4.69)$$

$$Q = \frac{C_3 C_1}{C_3 (G_2 (1 - K) + G_4) + G_4 C_1} \sqrt{\frac{G_4 G_2}{C_3 C_1}} \quad (4.70)$$

Nuevamente, para poder resolver estas ecuaciones de una forma más sencilla, se supone $R_2 = R_4 = R$ y $C_1 = C_3 = C$, de manera que quedan dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (4.71)$$

$$Q = \frac{C^2}{\frac{C}{R}(1 - K + 1) + \frac{C}{R}} \frac{1}{RC} = \frac{1}{3 - K} \quad (4.72)$$

El valor de ω_0 es otra vez definido por los valores de los componentes, mientras que el valor de Q es definido por el factor de amplificación del amplificador operacional.

4.2.5. Filtro con realimentación múltiple - Ganancia infinita

Si se toma un amplificador operacional con un $K \rightarrow \infty$ se puede obtener la transferencia general de un filtro similar al estudiado anteriormente, según se ilustra en la Figura 4.15.

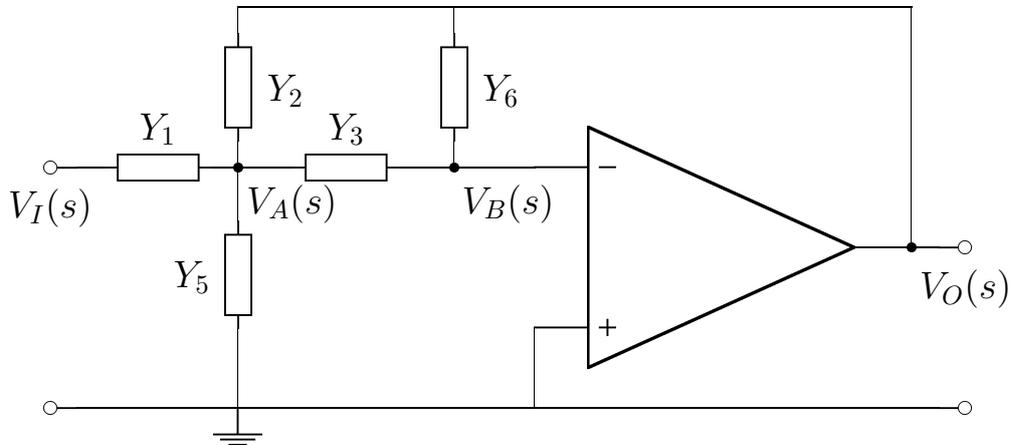


Figura 4.15: Un circuito genérico, con realimentación múltiple y ganancia infinita.

En este circuito se ha eliminado la admitancia Y_4 ya que con esta nueva configuración no tenía sentido, en este caso, la transferencia del circuito será:

$$T(s) = \frac{-Y_1 Y_3}{Y_6(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_5) + Y_2 Y_3} \quad (4.73)$$

Construcción de un filtro pasabajos

Se busca un filtro pasabajos que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0 \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (4.74)$$

1. En primer lugar, se seleccionan $Y_3 = 1/R_3$ y $Y_1 = 1/R_1$ para que la transferencia no tenga ceros.
2. A continuación se tom $Y_6 = sC_6$ para poder tener dos polos en el denominador.
3. Luego, $Y_2 = 1/R_2$, ya que tiene que haber un camino resistivo entre el nodo de control y la salida del amplificador.
4. Finalmente ee elige $Y_5 = sC_5$ para tener el segundo capacitor del circuito.

Figura 4.16: Un pasa bajos de ganancia infinita.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.16, es:

$$T(s) = \frac{-G_3 G_1}{sC_6(G_1 + G_2 + G_3 + sC_5) + G_2 G_3} \quad (4.75)$$

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{-G_3 G_1}{s C_6 G_1 + s C_6 G_2 + s C_6 G_3 + s^2 C_6 C_5 + G_2 G_3} \quad (4.76)$$

$$T(s) = \frac{-G_3 G_1}{s^2 C_6 C_5 + s C_6 (G_1 + G_2 + G_3) + G_2 G_3} \quad (4.77)$$

$$T(s) = \frac{-G_3 G_1}{C_6 C_5} \frac{1}{s^2 + s \frac{G_1 + G_2 + G_3}{C_5} + \frac{G_2 G_3}{C_6 C_5}} \quad (4.78)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_6 C_5}} = \sqrt{\frac{1}{C_6 C_5 R_2 R_3}} \quad (4.79)$$

$$Q = \frac{C_5}{G_1 + G_2 + G_3} \sqrt{\frac{G_2 G_3}{C_6 C_5}} \quad (4.80)$$

Además, se puede ver que $H_0 = -\frac{R_2}{R_1}$, lo que indica que este circuito se comporta como un amplificador inversor cuando $\omega = 0$.

Si se toma $R_1 = R_2 = R_3 = R$ y $C_5 = C_6 = C$:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad (4.81)$$

$$Q = \frac{C}{3/R} \frac{1}{RC} = \frac{1}{3} \quad (4.82)$$

Es decir que con estos valores, Q queda totalmente determinado, para tener un grado de libertad se puede elegir $R_2 = R_3 = R$ y $R_1 \neq R$:

$$Q = \frac{C}{1/R_1 + 2/R} \frac{1}{RC} = \frac{R_1}{R + 2R_1} \quad (4.83)$$

Sin embargo, no hay posibilidad de tener polos complejos conjugados, ya que $Q < 0.5$. Si se toma $C_6 \neq C_5$ se puede conseguir cualquier valor para Q , pero los cálculos son más complejos.

Construcción de un filtro pasa banda

Se busca un filtro pasa banda que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0 \frac{\omega_0}{Q}}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (4.84)$$

Figura 4.17: Un pasa banda de ganancia infinita.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.17, es:

$$T(s) = \frac{-s C_3 G_1}{G_6 (G_1 + s C_2 + s C_3 + G_5) + s^2 C_2 C_3} \quad (4.85)$$

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{-s C_3 G_1}{s^2 C_2 C_3 + s C_2 G_6 + s C_3 G_6 + G_5 G_6 + G_6 G_1} \quad (4.86)$$

$$T(s) = \frac{-G_1}{C_2} \frac{s}{s^2 + s \left(\frac{G_6}{C_3} + \frac{G_6}{C_2} \right) + \frac{G_6 (G_5 + G_1)}{C_3 C_2}} \quad (4.87)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_6(G_5 + G_1)}{C_3 C_2}} \quad (4.88)$$

$$Q = \frac{C_2 C_3}{G_6(C_2 + C_3)} \sqrt{\frac{G_6(G_5 + G_1)}{C_2 C_3}} \quad (4.89)$$

Si se toma $R_1 = R_5 = R_6 = R$ y $C_2 = C_3 = C$:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2}}{RC} \quad (4.90)$$

$$Q = \frac{C^2}{2C/R} \frac{\sqrt{2}}{RC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707 \quad (4.91)$$

Es decir que con estos valores, Q queda totalmente determinado (la parte real del polo es igual a la parte imaginaria), para tener un grado de libertad es necesario elegir otros valores.

La complicación es que las tres resistencias están en las dos ecuaciones, de manera que se tienen que tomar valores distintos para cada uno de los resistores.

$$Q = \frac{C}{1/R_1 + 2/R} \frac{1}{RC} = \frac{R_1}{R + 2R_1} \quad (4.92)$$

Sin embargo, no hay posibilidad de tener polos complejos conjugados, ya que $Q < 0.5$. Si se toma $C_6 \neq C_5$ se puede conseguir cualquier valor para Q , pero los cálculos son más complejos.

Construcción de un filtro pasa altos

Se busca un filtro pasa altos que cumpla con la expresión:

$$T(s) = \frac{H_0 s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2} \quad (4.93)$$

- Tanto Y_1 como Y_3 deben ser capacitores, para poder tener un cero doble.
- Además, Y_6 tiene que ser un resistor, y Y_2 un capacitor.

Figura 4.18: Un pasa altos de ganancia infinita.

La ecuación del circuito terminado, ilustrado en la Figura 4.18, es:

$$T(s) = \frac{-s^2 C_1 C_3}{G_6(s C_1 + s C_2 + s C_3 + G_5) + s^2 C_2 C_3} \quad (4.94)$$

Operando sobre el denominador:

$$T(s) = \frac{-s^2 C_1 C_3}{s^2 C_2 C_3 + s C_1 G_6 + s C_2 G_6 + s C_3 G_6 + G_5 G_6} \quad (4.95)$$

$$T(s) = \frac{-C_1}{C_2} \frac{s^2}{s^2 + s \left(\frac{G_6}{C_2 C_3} (C_1 + C_2 + C_3) \right) + \frac{G_5 G_6}{C_2 C_3}} \quad (4.96)$$

De manera que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{G_5 G_6}{C_2 C_3}} \quad (4.97)$$

$$Q = \frac{C_2 C_3}{G_6 (C_1 + C_2 + C_3)} \sqrt{\frac{G_5 G_6}{C_2 C_3}} \quad (4.98)$$

Tomando $C_1 = C_2 = C_3 = C$:

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{G_5 G_6}}{C} = \frac{1}{\sqrt{R_5 R_6} C} \quad (4.99)$$

$$Q = \frac{C^2}{G_6 (3C)} \frac{\sqrt{G_5 G_6}}{C} = \frac{\sqrt{G_5 G_6}}{3G_6} = 3\sqrt{\frac{R_6}{R_5}} \quad (4.100)$$

Es decir que para ω_0 se tiene en cuenta el producto de R_5 y R_6 , mientras que para Q se tiene en cuenta su relación.

Para tener más grados de libertad es necesario no tomar los capacitores iguales.

4.2.6. Circuito integral

Teniendo un pasa bandas genérico, es posible conseguir un pasa altos derivando y un pasa bajos integrando.

Capítulo 5

Cuadripolos

Se utiliza el concepto de **cuadripolo** cuando ya no importa lo que se encuentra dentro del circuito, sino sus variables para interactuar con otros elementos o circuitos.

Se trata de una red de dos puertos (o pares de terminales), para la que solamente hay 4 variables en juego: I_1 , I_2 , V_1 y V_2 . La única restricción que se establece es que sea lineal.

$$V_1(s) = f_1(I_1(s), I_2(s)) \quad (5.1)$$

$$V_2(s) = f_2(I_1(s), I_2(s)) \quad (5.2)$$

Teniendo en cuenta la restricción de linealidad, las ecuaciones anteriores se pueden expresar también como:

$$V_1(s) = k_1 I_1(s) + k_2 I_2(s) \quad (5.3)$$

$$V_2(s) = k_3 I_1(s) + k_4 I_2(s) \quad (5.4)$$

Se utilizan polinomios en s , es decir que se utilizan polinomios que ya se han transformado por Laplace, por lo que no es necesario tener en cuenta derivadas o integrales.

Las corrientes se consideran positivas cuando **ingresan** al cuadripolo por el polo **positivo**.

5.1. Matrices de valores del cuadripolo

La relación entre las tensiones y las corrientes puede expresarse a través de 6 posibles matrices. La matriz que se elija dependerá de la situación particular, siendo las más comunes las de impedancias y admitancias.

5.1.1. Matriz de impedancias

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Donde $Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$ $Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$ $Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$ $Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$

Para hacer este cálculo, se supone una fuente del lado de la corriente que es distinta de cero, y un circuito abierto del otro lado.

Z_{21} y Z_{12} son llamadas las *resistencias de transferencia*, y en el caso en que no haya fuentes controladas, tienen el mismo valor.

5.1.2. Matriz de admitancias

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11}(s) & Y_{12}(s) \\ Y_{21}(s) & Y_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Donde $Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0}$ $Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0}$ $Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0}$ $Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0}$

Para calcular estos parámetros, se utiliza una fuente del lado en que la tensión es distinta de cero, y un cortocircuito del otro lado.

Si no hay fuentes controladas $Y_{21} = Y_{12}$.

5.1.3. Matriz de parámetros híbridos

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

5.1.4. Matriz G

$$\begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.1.5. Matriz de transferencia (ABCD)

$$\begin{bmatrix} V_1(s) \\ I_1(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s) & B(s) \\ C(s) & D(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2(s) \\ -I_2(s) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

5.1.6. Matriz de transferencia inversa

$$\begin{bmatrix} V_2(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ \gamma(s) & \delta(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(s) \\ -I_1(s) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

5.2. Conexión de cuadripolos en paralelo

En una conexión de cuadripolos en paralelo, las tensiones V_1 y V_2 son las mismas para ambos cuadripolos, pero las corrientes de entrada son distintas.

Esta relación se puede expresar mediante impedancias

$$V_1 = Z_{11A}I_{1A} + Z_{12A}I_{2A} \quad (5.11)$$

$$V_2 = Z_{21A}I_{1A} + Z_{22A}I_{2A} \quad (5.12)$$

$$V_1 = Z_{11B}I_{1B} + Z_{12B}I_{2B} \quad (5.13)$$

$$V_2 = Z_{21B}I_{1B} + Z_{22B}I_{2B} \quad (5.14)$$

Y también mediante admintancias.

$$I_{1A} = Y_{11A}V_1 + Y_{12A}V_2 \tag{5.15}$$

$$I_{2A} = Y_{21A}V_1 + Y_{22A}V_2 \tag{5.16}$$

$$I_{1B} = Y_{11B}V_1 + Y_{12B}V_2 \tag{5.17}$$

$$I_{2B} = Y_{21B}V_1 + Y_{22B}V_2 \tag{5.18}$$

Teniendo en cuenta que $I_1 = I_{1A} + I_{1B}$ y $I_2 = I_{2A} + I_{2B}$, es evidente que para una conexión en paralelo, la matriz de admittancias total, es equivalente a la suma de las matrices de admittancias.

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = (Y_A + Y_B) \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

5.3. Conexión de cuadripolos en serie

Cuando dos cuadripolos se conectan en serie, las corrientes I_1 y I_2 son las mismas para ambos cuadripolos, mientras que las tensiones V_1 y V_2 son distintas.

En este caso, conociendo la matriz de impedancias de cada uno de los cuadripolos es posible obtener la matriz de impedancias total a partir de la suma de las otras dos.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = (Z_A + Z_B) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

5.3.1. Excepción

Sin embargo, no en todos los casos al conectar la salida de un cuadripolo a la entrada de otro se logra la condición de que las corrientes sean las mismas para ambos.

Por ejemplo, en la Figura 5.1 se puede ver un cuadripolo formado por 5 resistencias. Cuya matriz de impedancias es:

$$\begin{bmatrix} 3\Omega & 1\Omega \\ 1\Omega & 3\Omega \end{bmatrix} \tag{5.21}$$

Si se conectan los bornes a otro cuadripolo equivalente como se muestra en la Figura 5.2, se puede analizar el inconveniente.

En este caso, la impedancia $Z_{11} = 5\Omega$, en lugar de 6Ω que sería el valor esperado, si se piensa que ambos cuadripolos están en serie. Esto se debe a que no se cumple la condición de $I_{1A} = I_{1B}$ y $I_{2A} = I_{2B}$.

5.4. Conexión híbrida

Es posible utilizar conexiones mixtas, cuyas entradas estén en serie y salidas en paralelo, o al revés.

En el caso en que la entrada está en serie y la salida en paralelo, $V_1 = V_{1A} + V_{1B}$ y $I_2 = I_{2A} + I_{2B}$, mientras que $V_2 = V_{2A} = V_{2B}$ y $I_1 = I_{1A} = I_{1B}$.

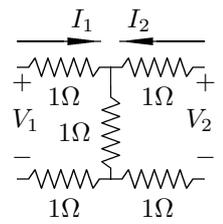


Figura 5.1: Un cuadripolo de 5 resistencias.

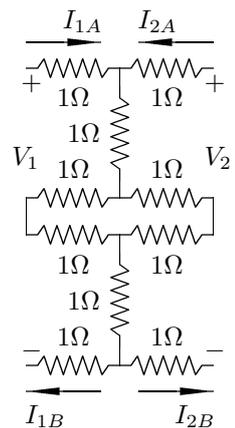


Figura 5.2: Conexión de dos cuadripolos

$$V_{1A} = H_{11A}I_1 + H_{12A}V_2 \quad (5.22)$$

$$I_{2A} = H_{21A}I_1 + H_{22A}V_2 \quad (5.23)$$

$$V_{1B} = H_{11B}I_1 + H_{12B}V_2 \quad (5.24)$$

$$I_{2B} = H_{21B}I_1 + H_{22B}V_2 \quad (5.25)$$

Se utiliza la matriz híbrida, ya que los valores no son todos de impedancias ni todos de admitancias.

Por otro lado, en el caso en que las entradas están conectadas en paralelo y las salidas en serie, se utiliza la otra matriz híbrida (\mathbf{G}). En este caso, $V_1 = V_{1A} = V_{1B}$ y $I_2 = I_{2A} = I_{2B}$, mientras que $V_2 = V_{2A} + V_{2B}$ y $I_1 = I_{1A} + I_{1B}$.

$$I_{1A} = G_{11A}V_1 + G_{12A}I_2 \quad (5.26)$$

$$V_{2A} = G_{21A}V_1 + G_{22A}I_2 \quad (5.27)$$

$$I_{1B} = G_{11B}V_1 + G_{12B}I_2 \quad (5.28)$$

$$V_{2B} = G_{21B}V_1 + G_{22B}I_2 \quad (5.29)$$

5.5. Conexión en Cascada

Se denomina conexión *en cascada* a la conexión en la cual la salida de uno de los cuadripolos es la entrada del otro. Es decir que, en este caso, $V_1 = V_{1A}$, $V_2 = V_{2B}$, $I_1 = I_{1A}$, $I_2 = I_{2B}$ y, además, $V_{2A} = V_{1B}$ y $I_{2A} = -I_{1B}$.

En este caso la matriz de parámetros que conviene utilizar para representar cada uno de los cuadripolos es la matriz de transferencia.

$$V_{1A} = A_A V_{2A} - B_A I_{2A} \quad (5.30)$$

$$I_{1A} = C_A V_{2A} - D_A I_{2A} \quad (5.31)$$

$$V_{1B} = A_B V_{2B} - B_B I_{2B} \quad (5.32)$$

$$I_{1B} = C_B V_{2B} - D_B I_{2B} \quad (5.33)$$

Teniendo en cuenta los datos de vinculación de ambos cuadripolos, es posible encontrar una expresión general para V_1 y V_2 , I_1 y I_2 .

$$V_1 = A_A V_{1B} + B_A I_{1B} \quad (5.34)$$

$$I_1 = C_A V_{1B} + D_A I_{1B} \quad (5.35)$$

$$V_1 = A_A (A_B V_{2B} - B_B I_{2B}) + B_A (C_B V_{2B} - D_B I_{2B}) \quad (5.36)$$

$$I_1 = C_A (A_B V_{2B} - B_B I_{2B}) + D_A (C_B V_{2B} - D_B I_{2B}) \quad (5.37)$$

$$V_1 = (A_A A_B + B_A C_B) V_2 - (A_A B_B + B_A D_B) I_2 \quad (5.38)$$

$$I_1 = (C_A A_B + D_A C_B) V_2 - (C_A B_B + D_A D_B) I_2 \quad (5.39)$$

La matriz de transferencia del cuadripolo total, será entonces.

$$[A_{Tot}] = \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_B & B_B \\ C_B & D_B \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

5.6. Cálculo de los parámetros

Para calcular las impedancias de un circuito como el de la Figura 5.4, es necesario en primer lugar suponer un circuito abierto en la ubicación de V_2 .

$$V_1 = I_1 \left(sL + \frac{1}{sC} \right) \Rightarrow Z_{11} = sL + \frac{1}{sC} \quad (5.41)$$

$$V_2 = I_1 sL \Rightarrow Z_{21} = sL \quad (5.42)$$

A continuación, se supone un circuito abierto en la ubicación de V_1 .

$$V_1 = I_2 sL \Rightarrow Z_{12} = sL \quad (5.43)$$

$$V_2 = I_2 (sL + R) \Rightarrow Z_{22} = sL + R \quad (5.44)$$

De manera que la matriz de impedancias será

$$\begin{bmatrix} sL + 1/sC & sL \\ sL & sL + R \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Como se puede ver, los términos Z_{12} y Z_{21} son iguales, ya que no hay fuentes controladas en el circuito.

Por otro lado, para calcular la matriz de admitancias, es necesario suponer primero que en el lugar de V_2 hay un cortocircuito, y luego lo mismo para V_1 .

$$V_1 = I_1 \left(\frac{1}{sC} + \frac{RsL}{sL + R} \right) \quad (5.46)$$

$$Y_{11} = \frac{sC(sL + R)}{s^2RCL + sL + R} \quad (5.47)$$

Por otro lado, si se invirtieran las posiciones de la resistencia y el inductor como en la Figura 5.4, las impedancias del circuito serían

$$\begin{bmatrix} R + 1/sC & R \\ R & R + sL \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

5.6.1. Generalización para las admitancias

Los circuitos anteriores son de tipo T , cuyos cálculos pueden generalizarse para obtener los valores de las admitancias para cualquier cuadripolo que tenga esa disposición, como se indica en la Figura 5.5

El criterio para resolver estos cálculos es el mismo que se utiliza para resolver un divisor de corrientes.

En primer lugar, se considera que la tensión $V_2 = 0$. De este modo, se pueden obtener las admitancias Y_{11} y Y_{21} .

$$I_1 = \frac{V_1}{\frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1} \quad (5.49)$$

$$I_1 = \frac{V_1 (Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.50)$$

$$Y_{11} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.51)$$

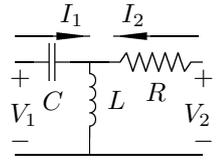


Figura 5.3: Un cuadripolo por dentro.

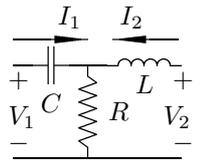


Figura 5.4: Un cuadripolo por dentro.

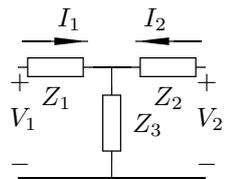


Figura 5.5: Un cuadripolo genérico.

$$I_2 = -I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (5.52)$$

$$I_2 = -\frac{V_1 Z_3 (Z_2 + Z_3)}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 (Z_2 + Z_3)} \quad (5.53)$$

$$I_2 = -\frac{V_1 Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.54)$$

$$Y_{21} = -\frac{Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.55)$$

Anulando la tensión V_1 se pueden obtener las admitancias Y_{12} y Y_{22} .

$$Y_{12} = -\frac{Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.56)$$

$$Y_{22} = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3} \quad (5.57)$$

5.7. Cálculo de la transferencia

Utilizando la matriz de admitancias,

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (5.58)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (5.59)$$

Si se quiere encontrar la transferencia $T(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$, se puede tomar que cuando $I_2 = 0$ (es decir a circuito abierto).

$$0 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (5.60)$$

$$T(s) = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} \quad (5.61)$$