Fisica 1 (62.01)

Maximiliano Curia, Margarita Manterola

17 de noviembre de 2009

Índice general

Parte I

Estudio de una partícula

Capítulo 1

Cinemática

1.1. Definiciones

Movimiento El movimiento es el fenómeno más fundamental y obvio que observamos a nuestro alrededor, todos los procesos imaginables están formados por movimientos. El movimiento de un cuerpo está influido por las interacciones con los cuerpos que lo rodean.

Decimos que un objeto esta en movimiento cuando cambia su posición en el tiempo. Ha evolucionado cinemáticamente, se movió.

Sistema de Referencia Reposo y movimiento son conceptos relativos, es decir, dependen de la condición del objeto respecto al cuerpo que sirve de referencia. El observador coloca el sistema de referencia sobre el objeto que está en reposo con respecto a él.

Para ubicar algo necesito una referencia. Tomando el espacio como isotropico (cualquier dirección es la misma) y como un cubo inmeso (donde tomo ejes x, y, z perpendiculares entre si, respetando la terna derecha[1]).

Cualquier punto del cubo puede representarse con una terna formada de escalares. Es decir, $\vec{r_a} = x_a \breve{e}_x + y_a \breve{e}_y + z_a \breve{e}_z$, donde $\breve{e}_x = (1, 0, 0)$, $\breve{e}_y = (0, 1, 0)$ y $\breve{e}_z = (0, 0, 1)$ y x_a, y_a, z_a nuestros escalares.

Con esto obtenemos nuestra primera variable cinemática, posición en el tiempo.

1.2. Resumen

Sea $\vec{r}$ un vector posición

$$\vec{v} = \frac{\delta \vec{r}}{\delta t} \tag{1.1}$$

$$\vec{a} = \frac{\delta \vec{v}}{\delta t} \tag{1.2}$$

[1] Regla mnemotectica xyzxyz, producto vectorial x, y da z, producto vectorial y, x da -z

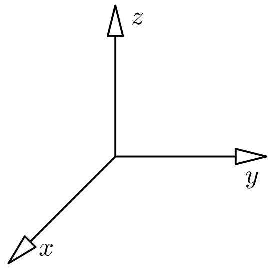

Figura 1.1: Dibujo de los tres ejes

Además si tenemos un movimiento rectilineo

$$\vec{a} = \frac{\delta^2 \vec{r}}{\delta t^2} \tag{1.3}$$

Si $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = cte$ y $\vec{r} = \vec{v}t$
Si $\vec{a} \neq 0$ y tenemos un movimiento rectilineo $\Rightarrow$

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a} \tag{1.4}$$

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{1.5}$$

Sea un sistema $\breve{e}_t$ y $\breve{e}_n$ donde $\breve{e}_t$ es paralela a la dirección de la velocidad en $\breve{e}_n$ perpendicular a $\breve{e}_t$, luego $|\vec{a}| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ con:

$$\vec{a}_t = \frac{\delta v}{\delta t}\breve{e}_t \tag{1.6}$$

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\breve{e}_n \tag{1.7}$$

Siendo ρ el de radio de curvatura de la curva.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.8}$$

1.3. Movimiento Rectilineo

Velocidad La rapidez con que se mueve un cuerpo. Es una magnitud vectorial.

Velocidad media Se obtiene haciendo el cociente entre el desplazamiento y el tiempo.

$$\vec{V}_{med} = \frac{\vec{r}}{t} \tag{1.9}$$

Velocidad instantánea La velocidad de un móvil en un instante partícular.

$$\vec{V}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}}{t} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \tag{1.10}$$

Generalmente la velocidad varía con el tiempo, es decir $\vec{v} = \vec{f}(t)$. Si la velocidad a lo largo del tiempo permanece constante, el movimiento es uniforme.

En un gráfico de desplazamiento en función del tiempo, la línea que une dos puntos sobre la curva del desplazamiento, es la velocidad media en ese tramo. Y la línea tangente a un punto de la curva, es la velocidad instantánea.

El signo de la velocidad en el movimiento rectilíneo, indica el sentido del movimiento.

Aceleración Es el cambio que sufre la velocidad a través del tiempo. Es una magnitud vectorial.

Aceleración media Se obtiene haciendo el cociente entre la velocidad media y el tiempo.

$$\vec{A}_{med} = \frac{\vec{V}_{med}}{t} \tag{1.11}$$

Aceleración instantánea La aceleración del móvil en un instante partícular.

$$\vec{A}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{V}_{inst}}{t} = \frac{\partial \vec{V}_{inst}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

De la misma manera que con la velocidad, en un gráfico de velocidad en función del tiempo, la línea que une dos puntos sobre la curva de la velocidad, es la aceleración media en ese tramo. Y la línea tangente a un punto de la curva, es la aceleración instantánea.

Si el signo de la acelaración en el movimiento rectilíneo, es igual al de la velocidad, se trata de un movimiento acelerado, si son opuestos, es desacelerado.

1.3.1. Movimiento vectorial libre bajo la acción de la gravedad

Cuando un cuerpo cae bajo la acción de la gravedad una distancia de (como máximo) unos cientos de metros, el movimiento es uniformemente acelerado, con una aceleración que es la misma para todos los cuerpos: g, o **aceleración de la gravedad**. Esto se cumple siempre y cuando podamos despreciar los efectos del aire, es decir que se aplica a cuerpos compactos. El valor de g es aproximadamente. de $9,8m/s^2$.

El sistema de referencia que se puede tomar, puede ser hacia arriba o hacia abajo, pero g siempre apuntará hacia el centro de la tierra.

Fórmulas

$$\begin{aligned} V(t) &= V_0 + g(t - t_0) && (1.13) \\ y(t) &= y_0 + V_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 && (1.14) \\ V^2(t) &= V_0^2 - 2g(y(t) - y_0) && (1.15) \end{aligned}$$

1.3.2. Representación vectorial de la velocidad y la aceleración en el movimiento rectilíneo

La velocidad en el movimiento rectilíneo está dada por un vector cuyo módulo está dado por $v = dx/dt$, cuya dirección coincide con la del movimiento, y cuyo sentido depende del sistema de referencia, y se puede determinar por el signo de dx/dt.

La aceleración en el movimiento rectilíneo es un vector cuyo módulo está dado por $a = dv/dt$ o bien $a = d^2x/dt^2$, cuya dirección tambien coincide con la del movimiento y cuyo sentido depende de si está frenando o acelerando, y se puede determinar por el signo de dv/dt o de d^2x/dt^2.

1.3.3. Vectorialmente

$$\vec{x} = x\breve{e_x} \tag{1.16}$$

$$\vec{v} = v\breve{e_x} = \frac{dx}{dt}\breve{e_x} \tag{1.17}$$

$$\vec{a} = a\breve{e_x} = \frac{dv}{dt}\breve{e_x} \tag{1.18}$$

1.4. Movimiento Curvilíeneo

1.4.1. Composición de velocidades y aceleraciones

Un cuerpo puede estar sujeto a distinto agentes, en ese caso, el movimiento resultante se obtiene mediante la combinación de las respectivas velocidades y aceleraciones, de acuerdo **con las reglas de suma de vectores**.

1.4.2. Aceleración normal y tangencial

La aceleración en un movimiento curvilíneo siempre apunta hacia la concavidad de la curva. Puede descomponerse en una componente tangencial al movimiento (**aceleración tangencial**) y una componente perpendicular al movimiento (**aceleración normal** o **centrípeta**).

La aceleración tangencial produce un cambio en el **módulo** de la velocidad. La aceleración normal produce un cambio en la **dirección** de la velocidad.

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} \tag{1.19}$$

$$\vec{a_t} = \frac{dv}{dt} \tag{1.20}$$

$$\vec{a_n} = \frac{v^2}{R} \tag{1.21}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\breve{t} + \frac{v^2}{R}\breve{n} \tag{1.22}$$

Si el movimiento es uniforme, el módulo de la velocidad permanece constante, y la aceleración tangencial es cero. Pero si el movimiento es curvilíneo, hay una aceleración centrípeta.

Deducción de las expresiones

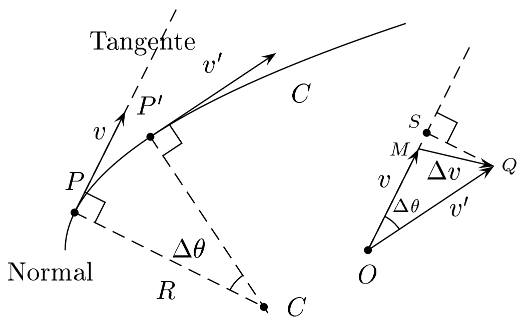

Figura 1.2: Deducción gráfica de las expresiones

Consideremos un partícula que se mueve a lo largo de una trayectora curva C. En el tiempo t la partícula está en P con velocidad v, y en el tiempo $t + \Delta t$ la partícula está en P' con velocidad v'. El cambio de velocidad es

$$\Delta v = v' - v$$

dado por el $\overrightarrow{MQ}$, como se muestra en el diagrama auxiliar. Si el ángulo entre v y v' es $\Delta\theta$, entonces tenemos

Componente tangencial de Δv: $\overrightarrow{MS} = \overrightarrow{v'} \cos(\Delta\theta) - \overrightarrow{v}$

Componente normal de Δv: $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{v'} \operatorname{sen}(\Delta\theta)$

Pot tanto, las componentes de la aceleración media en el intervalo Δt son

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_{mt}} &= \tfrac{\overrightarrow{v'} \cos(\Delta\theta) - \overrightarrow{v}}{\Delta t} \\ \overrightarrow{a_{mn}} &= \tfrac{\overrightarrow{v'} \operatorname{sen}(\Delta\theta) - \overrightarrow{v}}{\Delta t} \end{aligned}$$

Siendo $\overrightarrow{a_{mt}}$ la componente tangencial de la aceleración media y $\overrightarrow{a_{mn}}$ la componente normal de la aceleración media.

Las componentes de la aceleración en P están dadas por

$$\overrightarrow{a_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v'} \cos(\Delta\theta) - \overrightarrow{v}}{\Delta t}$$

y

$$\overrightarrow{a_n} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v'} \operatorname{sen}(\Delta\theta)}{\Delta t}$$

Ahora, cuando $\Delta t \to 0$, también $\Delta\theta \to 0$ y

$$\lim_{\Delta t \to 0} \cos(\Delta\theta) = 1$$

De modo que podemos escribir

$$\overrightarrow{a_t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v'} \cos(\Delta\theta) - \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v'} - \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{\delta v}{\delta t}$$

Y con esto llegamos a la ecuacion de la aceleración tangencial. Ahora, cuando $\Delta t \to 0$ tenemos que $\operatorname{sen}(\Delta\theta)$ se puede sustituir por $\Delta\theta$ y

$$\lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v'} = \overrightarrow{v}$$

En consecuencia,

$$\overrightarrow{a_n} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v'} \Delta\theta \Delta t = \overrightarrow{v} \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\theta \Delta t$$

Si llamanos R al radio de curvatura de la trayectoria en P, y hacemos $\Delta s = \text{arc}PP'$, de la figura resulta que

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R}$$

Además teniendo en cuenta

$$v = \frac{\delta s}{\delta t}$$

Podemos escribir:

$$\overrightarrow{a}_n = \overrightarrow{v} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{R} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \overrightarrow{v} \left(\frac{1}{R} \frac{\delta s}{\delta t} \right) = \overrightarrow{v} \left(\frac{\overrightarrow{v}}{R} \right) = \frac{\overrightarrow{v}^2}{R}$$

Que es la ecuación de la aceleración normal.

1.4.3. Movimiento curvilíneo con aceleración constante

Las fuerzas que lo provocan son constantes y ocurre siempre en un plano.

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_{t_0}^{t} dt \quad (1.23)$$

$$v = v_0 + a(t - t_0) \quad (1.24)$$

La equación 1.24 representa la velocidad en cualquier instante.

$$\int_{r_0}^{r} dr = \int_{t_0}^{t} dv \quad (1.25)$$

$$r = r_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad (1.26)$$

La equación 1.26 representa la posición en cualquier instante.

1.5. Movimiento Circular

Es un movimiento curvilíneo cuya trayectoria es un círculo.

Velocidad angular Es igual al ángulo barrido por el radio por unidad de tiempo.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (1.27)$$

Teniendo en cuenta que $v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$, entonces.

$$v = R\omega \tag{1.28}$$

El vector de la velocidad angular es perpendicular al plano del movimiento en el sentido dado por la regla de la mano derecha. Se expresa en radianes por segundo (s^{-1})

Aceleración angular Cuando la velocidad angular de una partícula cambia con el tiempo, tenemos aceleración angular, definida por:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{1.29}$$

Teniendo en cuenta que $a_t = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$, entonces.

$$a_t = R\alpha \tag{1.30}$$

Se expresa en radianes por segundo cuadrado (s^{-2}).

1.5.1. Movimiento circular uniforme

Es decir, teniendo velocidad angular uniforme. En este tipo de movimiento no hay aceleración tangencial, pues no varía el módulo de la velocidad. Pero si hay aceleración normal, que hace variar su dirección y sentido.

Périodo (T) Tiempo empleado en efectuar una vuelta completa o revolución.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1.31}$$

Se expresa en segundos.

Frecuencia (f) Número de revoluciones por unidad de tiempo.

$$f = \frac{1}{T} \tag{1.32}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{1.33}$$

Se expresa en s^{-1} o en $Hertz$.

1.5.2. Movimiento circular uniformemente variado

Es decir, con aceleración angular constante. En este tipo de movimiento hay aceleración normal y aceleración tangencial, puesto que varían tanto el módulo de la velocidad, como su dirección y sentido.

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha(t - t_0) \tag{1.34}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \tag{1.35}$$

ht

Figura 1.3: Dibujo de dos sistemas con un vector $\vec{V}$ uniendo los origenes

1.5.3. Relaciones vectoriales en el movimiento circular

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{v} & = & \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} & = & \vec{\omega} \times \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.36}$$

$$a_n = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} \tag{1.37}$$

$$a_t = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{1.38}$$

1.5.4. Ejemplo

Velocidad y aceleración de un punto sobre la superficie terrestre

La velocidad angular de la Tierra, sobre su propio eje es:

$$\theta = \frac{2\pi}{T_d} = 7,272 \times 10^{-5} \mathrm{rad/s} \tag{1.39}$$

La velocidad angular de la Tierra, alrededor del sol es:

$$\theta = \frac{2\pi}{T_a} = 1,99 \times 10^{-7} \mathrm{rad/s} \tag{1.40}$$

En el primer caso T_d es la cantidad de segundos en un dia sideral, en el segundo T_a es la cantidad de segudos en un año.

La velocidad de cualquier punto situado sobre la superfice de la Tierra es tangencial al círculo paralelo al ecuador. Su módulo es $v = \omega R$, tomando $R = r\cos(\phi)$ (donde ϕ es el ángulo que forma el radio de la Tierra al ecuador con el radio al punto donde se quiere calcular y r es el radio de la Tierra).

Entonces: $v = \omega r \cos(\phi)$ La aceleración es:

$$a = \omega^2 r \cos(\phi) \tag{1.41}$$

Si reemplazamos los valores obtenidos antes:

$$v = 7,272 \times 10^{-5} \mathrm{rad/s} 6,35 \times 10^6 \times \cos(\phi) = 462 cos(\phi) \mathrm{m/s} \tag{1.42}$$

$$a = 7,272^2 \times 10^{-10} \mathrm{rad/s} 6,35 \times 10^6 \times \cos(\phi) = 3,35 \times 10^2 \cos(\phi) \mathrm{m/s} \tag{1.43}$$

$$\tag{1.44}$$

Tiene un valor máximo en el ecuador donde $\phi = 0$.

1.6. Transformaciones de Galileo

1.6.1. Resumen de movimiento de traslación

Sean dos sistemas S y S' con S' moviendose a una velocidad $\vec{V}$ constante con respecto a S, luego la relación entre velocidades es:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \tag{1.45}$$

1.6.2. Resumen de movimiento de rotación relativo

Sean dos sistemas S y S', con S' girando alrededor del otro con velocidad angular ω constante, entoces la relación entre la velocidad $\vec{v}'$ y $\vec{v}$ es:

y de las aceleraciones

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.46}$$

1.6.3. Movimiento de rotación relativo

Considere dos observadores O y O' que giran uno con respecto de otro pero sin movimiento de traslación relativo. Por simplicidad suponga que O y O' utilizan su propio sistema de referencia ligado a cada uno de ellos, pero con un origen en común. En este caso, el observador O, que utiliza el sistema de referencia XYZ, nota que el sistema $X'Y'Z'$ ligado a O' esta girando con velocidad angular $\vec{\omega}$. Para el observador O' ocurre lo contrario, esto es, O' ve al sistema XYZ (unido a O) girando con velocidad angular $-\vec{\omega}$. Sea $\vec{r}$ el vector de posición de una partícula P en relacion con el origen común. La velocidad de P medida por O (en relación con su sistema de referencia XYZ es

$$\vec{V} = \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta t}\right)_0 \tag{1.47}$$

Donde el subíndice 0 se utiliza para hacer notar que es la velocidad de P medida por 0. Si P está en reposo con respecto al observador O' que está girando, P describe un círculo con velocidad angular $\vec{\omega}$ en relación con O. Por tanto, tiene una velocidad relativa a O dada por $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Si, en vez de lo anterior, la partícula P tiene una velocidad $\vec{V}'$ relativa a O'(es decir $\vec{V}' = (\delta \vec{r}/\delta t)'_O$), entonces la velocidad de la partícula P en relación con O debe ser

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{1.48}$$

Esta expresion relaciona las velocidades $\vec{V}$ y $\vec{V}'$ de la misma partícula medidas por O y O' en movimiento de rotación relativo entre si con una velocidad angular ω.

La relación entre la acelaración de P medida por O y O' es un poco más complicada y, como se muestra en la siguiente deducción, está dada por

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{V}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.49}$$

o

$$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{V}' - 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{1.50}$$

La ecuación 1.50 relaciona las aceleraciones a y a' de la partícula P medidas por O y O' que se encuentran en movimiento de rotación relativo uniforme. El segundo término se conoce como *aceleración de Coriolis*, que veremos en 1.6.4. El tercer término corresponde a una *aceleración centrífuga*.

Deducción del cálculo de aceleraciones

FALTA, pareceria que no hace falta, aunque la sección de Aceleración de Coriolis esta un poco pobre y la deducción podria mejorarla.

1.6.4. Aceleración de Coriolis

La aceleración medida por un observador que gira con la Tierra es:

$$\vec{a}' = \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{\omega} v' \tag{1.51}$$

La aceleración de Coriolis es perpendicular a la velocidad v', su efecto es desviar a la partícula en dirección perpendicular a su velocidad. En el caso de una caída vertical, la desviación deja a la partícula en un punto al este del punto situado debajo de la posición inicial. En el caso de un movimiento horizontal, la desviación es hacia la derecha en el hemisferio norte y hacia la izquierda en el sur.

Este efecto se observa en tormentas alrededor de centros de baja presión, y en la rotación del plano de oscilación de un péndulo.

Capítulo 2

Dinámica

2.1. Definiciones

Concepto de interacción El movimiento de un cuerpo es el resultado directo de sus interacciones con otros cuerpos. Las interacciones se expresan de manera cuantitativa, con el término llamado *fuerza.*

Una partícula *libre* es aquella que no está sujeta a ninguna interacción, en la realidad no existen, pero en la práctica podemos conseguir situaciones en las que las interacciones sean despreciables, debido a la distancia con la partícula.

Primera Ley de Newton también conocida como *ley de inercia*

Una partícula libre se mueve con velocidad constante, es decir, sin aceleración.

Masa gravitatoria La *masa gravitatoria* de un objeto es la medida que obtenemos al utilizar una balanza de brazos y compararla con otro cuerpo cuya masa se toma como unidad. Esta masa puede ser medida debido a la atracción de la gravedad.

Masa inercial La *masa inercial* es una propiedad que determina cómo cambia su velocidad cuando interactúa con otros cuerpos. Esta masa se puede medir cuando se hace interactuar dos cuerpos y se mide el cambio en sus velocidades, utilizando la fórmula:

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = \frac{m_1}{m_2} \tag{2.1}$$

Vector cantidad de movimiento o Momentum Lineal (magnitud vectorial)

El producto de la masa por la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.2}$$

Tiene la misma dirección que la velocidad. Se mide en kg m/s. Esta definición sólo es válida para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz.

Permite reestablecer la ley de inercia como: una partícula libre siempre se mueve con momentum constante en relación con un sistema inercial de referencia.

Si $\vec{p}$ no es constante, en general:

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} \tag{2.3}$$

Siempre y cuando la masa sea constante.

Principio de conservación del momentum Una interacción de dos partículas produce un intercambio en el momentum, y el momentum total($\vec{p_t} = \vec{p_1} + \vec{p_2}$) permanece constante.

Es decir, $\Delta\vec{p_1} = -\Delta\vec{p_2}$ y $\vec{P_f} = \vec{P_0}$.

Segunda Ley de Newton o *ley de la masa*

La variación de momentum de una partícula con respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula.

$$\vec{F} = \frac{\delta\vec{p}}{\delta t} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a} \tag{2.4}$$

Siempre que la masa sea constante y las velocidades pequeñas comparadas con la de la luz.

Adémas el peso del cuerpo es:

$$\vec{P} = m\vec{g} \tag{2.5}$$

Tercera Ley de Newton o *ley de acción y reacción*

Cuando dos partículas interactúan, la fuerza sobre la primera, ejercida por la segunda, es igual y opuesta a la fuerza sobre la segunda ejercida por la primera. $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$

Unidades de Fuerzas En el sistema mks o SI, la unidad de fuerza es:

$$[F] = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N (Newton)} \tag{2.6}$$

El *kilogramo-fuerza* se define a partir de la ecuación del peso: 1kgf es el peso de una masa de un kilogramo. Es decir:

$$1\text{kgf} = g\text{N} \approx 9,81\text{N} \tag{2.7}$$

2.1.1. Resumen cantidad de movimiento

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

$$\frac{\delta\vec{P}}{\delta t} = \vec{F}_{ext} \leftrightarrow \quad \vec{P} = \text{cte} \quad \leftrightarrow \quad \sum\vec{F}_{ext} = 0 \tag{2.10}$$

2.1.2. Interacciones elásticas

FALTA

2.1.3. Reacciones de vínculo

FALTA ??

2.1.4. Fuerzas de frotamiento

FALTA ??

2.1.5. Fuerzas de rozamiento

o de *fricción*

Cuando hay dos cuerpos en contacto, existe una resistencia que se opone al movimiento relativo de los cuerpos entre sí. Cuando los dos cuerpos son del mismo material, la interacción de sus moléculas se llama *cohesión*, cuando son de distinto, se llama *adhesión*.

La fuerza de fricción está en relación a la fuerza normal que presiona un cuerpo contra otro. La constante de proporcionalidad, llamada coeficiente de fricción, puede ser cinética o estática. En el caso del coeficiente estático, la fórmula $F = \mu_e N$ representa la fuerza mínima necesaria para poner en movimiento a los dos cuerpos. En el caso del cinético, $F = \mu_d N$ representa la fuerza mínima mantener en movimiento los dos cuerpos.

2.2. Movimiento armónico simple

Es la clase más simple y más usual de movimiento oscilatorio (que es cuando una partícula se mueve periódicamente alrededor de un punto de equilibrio, sobre una línea horizontal).

Desplazamiento de una partícula con MAS :

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.11}$$

Puede ser con el seno, $(\omega t + \alpha)$ representan el *ángulo de fase* o *fase*, el α representa la *fase* inicial. A es la *amplitud*, el desplazamiento máximo a partir del origen.

El *período*, tiempo que tarda en repetirse el movimiento:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{2.12}$$

La *frecuencia angular*, cantidad de veces que se repite el movimiento por unidad de tiempo:

$$f = 2\pi\omega = 1/T \tag{2.13}$$

La velocidad de la partícula es:

$$v = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) \tag{2.14}$$

Y la aceleración:

$$a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \tag{2.15}$$

La fuerza debe ser:

$$F = -m\omega^2 x \tag{2.16}$$

Tomando $m\omega^2 = k$, entonces:

$$F = -kx \tag{2.17}$$

Son proporcionales y opuestas al desplazamiento.

La fuerza se dice *central* y *de atracción*, puesto que en $x = 0$, $F = 0$ ((falta)¿Y la fuerza siempre apunta al centro??).

Energía cinetica:

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) \tag{2.18}$$

Máxima en el centro y mínima en los extremos.

Energía potencial:

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{2.19}$$

Mínima en el centro y máxima en los extremos.

La energía total es constante, ya que la fuerza actuante es una fuerza conservativa.

2.2.1. Ecuación básica del movimiento armónico simple

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} + \omega^2 x = 0 \tag{2.20}$$

2.3. Aplicaciones de fuerzas

Movimiento de un cuerpo por acción de una fuerza constante.

Cuando la fuerza bajo la cual se mueve un cuerpo es constante, la aceleración es constante y la velocidad cambia en dirección paralela a esa fuerza, y la trayectoria tiende asintóticamente a la dirección de la fuerza.

El desplazamiento es una combinación de dos vectores: en la dirección de la velocidad inicial y en la de la fuerza aplicada (Ej: proyectil que cae debido al peso).

2.3.1. Movimiento de un cuerpo por acción de una fuerza dependiente de la posición

FALTA

2.3.2. Péndulo simple

Una partícula de masa m suspendida de un punto O mediante una cuerda de longitud l de masa despreciable.

Al desplazar la cuerda a una posición alejada del centro, se provoca el comienzo de las oscilaciones, desde la posición inicial hasta la simétrica. Este movimiento se debe a la componente tangencial de la fuerza peso de la partícula, que será cero en el centro y máxima en los extremos y apuntará siempre hacia el centro.

El movimiento del péndulo simple constituye un MAS cuando las amplitudes de oscilación son pequeñas. En ese caso:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2.21}$$

Con amplitudes grandes el periodo depende del ángulo de la posición inicial.

2.3.3. Resolución de la ecuación diferencial para pequeñas amplitudes

FALTA

2.3.4. Energía de un péndulo simple

FALTA

2.3.5. Fuerzas viscosas

Son las fuerzas de fricción en los fluídos. Se determinan estadísticamente, cumpliendo con:

$$F = -K\nu v \tag{2.22}$$

Se oponen a la velocidad del cuerpo, siendo ν el coeficiente de viscosidad (depende del fluído) y K el coeficiente de arrastre (depende de la forma y tamaño del cuerpo). El coeficiente de velocidad se mide en **poises**.

Al ser proporcional a la velocidad del fluído, cuando un cuerpo está bajo la acción de una fuerza en un medio viscoso, los aumentos de velocidad se compensan con aumentos de viscosidad, de tal manera que cuando se alcanza cierta velocidad se compensa la fuerza con la de viscosidad y se consigue una velocidad constante. Esa velocidad, llamada velocidad límite, cumple con:

$$v_l = \frac{F}{K\nu} \tag{2.23}$$

Teniendo en cuenta el principio de arquímedes, cuando la única fuerza que actúa es el peso:

$$v_l = \frac{(m - m')g}{K\nu} \tag{2.24}$$

Siendo m' la masa de líquido desplazada por el cuerpo.

2.4. Sistemas inerciales y no inerciales

Observador inercial No está sujeto a interacciones con el mundo. El sistema de referencia que usa es llamado **sistema inercial** (puede permanecer en reposo o con velocidad constante, pues eso no implica interacciones).

La Tierra no es un sistema inercial, porque está en movimiento, pero el error es pequeño, de manera que en la práctica se lo puede considerar un sistema inercial.

Las leyes de Newton se cumplen solamente en sistemas de referencia inerciales. Para que las leyes de Newton puedan ser aplicadas en los sistemas no inerciales, se aplica una F_i (Ficticia) que no resulta de ninguna interacción entre partículas.

Sistemas con masa variable Ejemplos: una gota de lluvia, un cohete espacial, una cinta transportadora.

La ecuación en estos casos es:

$$F = \frac{\delta P}{\delta t} = m\frac{\delta v}{\delta t} + \frac{\delta m}{\delta t}(v - v_0) \tag{2.25}$$

Resultante de fuerzas Una partícula que interactúa con más de una partícula, está sometida a una **fuerza resultante** de tal manera que:

$$\frac{\delta \vec{P}}{\delta t} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + ... = \vec{F} \tag{2.26}$$

Utilizando la suma vectorial.

2.5. Torque y Momentum angular

2.5.1. Movimiento Curvilíneo

Para que un cuerpo se mueva con trayectoria curvilínea, la fuerza resultante debe formar ángulo con la velocidad. De tal manera que la fuerza tiene una componente *tangencial*:

$$\vec{F_T} = m\frac{\delta \vec{v}}{\delta t} = m\vec{a_T} \tag{2.27}$$

Que la responsable del cambio en el módulo de la velocidad. Y una componente **normal**:

$$\vec{F_N} = \frac{m\vec{v}^2}{R} = m\vec{a_N} \tag{2.28}$$

Siendo R el radio de curvatura de la trayectoria y F_N responsable del cambio de dirección de la velocidad.

En una trayectoria circular, $v = \omega R$ con lo que:

$$\vec{F_N} = m\vec{\omega}^2 R \tag{2.29}$$

y es constante.

Si $F_T = 0$ es un movimiento curvilíneo uniforme. Cuando $F_N = 0$ es rectilíneo.

2.5.2. Torque

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.30}$$

y también

$$|\vec{\tau}| = F r \operatorname{sen}(\theta) \tag{2.31}$$

Siendo $\vec{r}$ el vector que une el punto de aplicacion de la fuerza a la partícula, r el modulo del mismo(la distancia), θ el ángulo formado entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

Es una medida de la efectividad de una fuerza para que ésta produzca una rotación alrededor de un eje.

2.5.3. Momentum angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.32}$$

y también

$$|\vec{L}| = mrv\,\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.33}$$

Siendo $\vec{r}$ el vector que va desde el origen del sistema de referencia (arbitrario) a la partícula, r el modulo del mismo(la distancia), θ el ángulo formado entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$.

Es un vector perpendicular al plano determinado por $\vec{r}$ y $\vec{v}$, su magnitud depende de la posición del punto que se tome como origen.

En el caso del *movimiento circular*, tomando como origen el centro del círculo, $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, teniendo en cuenta $v = r\omega$, entonces:

$$|\vec{L}| = mr^2\omega\,\mathrm{sen}(\theta) \tag{2.34}$$

La variación del momento angular de un partícula en el tiempo, es igual al torque de la fueza aplicada a la partícula:

$$\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{\tau} \tag{2.35}$$

Cuando L y τ, se miden desde el mismo punto.

Fuerzas centrales su dirección siempre pasa por un punto fijo: *centro de fuerza*.

Cuando la dirección de F pasa por el punto de origen de $\vec{r}$ (F es una fuerza central), $\tau = 0$, $\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = 0 \Rightarrow L$ permanece constante

2.5.4. Resumen momentum angular o impulso angular

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.36}$$

$$\frac{\delta\vec{L}}{\delta t} = \vec{\tau}_{ext} = \sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} \leftrightarrow \vec{L} = \mathrm{cte} \leftrightarrow \sum \vec{r} \times \vec{F}_{ext} \tag{2.37}$$

Capítulo 3

Trabajo y Energía

3.1. Definiciones

Trabajo Fuerza aplicada por la distancia recorrida. Para cualquir tipo de fuerzas.

$$W = \int_A^B F dr \tag{3.1}$$

En partícular cuando la fuerza es constante:

$$W = F \Delta x \cos\theta \tag{3.2}$$

y también

$$W = \vec{F}.\Delta\vec{x} \tag{3.3}$$

Siendo $\Delta\vec{x}$ el desplazamiento de la partícula, θ el ángulo formado en entre $\Delta\vec{x}$ y $\vec{F}$.

Si θ es 90^o el trabajo es cero, si es mayor a 90^o el trabajo es negativo.

Potencia La cantidad de trabajo hecha por unidad de tiempo.

Potencia instantánea

$$P = \frac{\delta W}{\delta t} \tag{3.4}$$

y con fuerzas contantes:

$$P = F\frac{\delta r}{\delta t} = Fv \tag{3.5}$$

Potencia media

$$P = \frac{W}{\Delta t} \tag{3.6}$$

3.1.1. Unidades de Trabajo y Potencia

Trabajo

$$\begin{aligned} \text{Nm} &= \text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{J (Joule)} && (3.7) \\ \text{kWh (kilWatt hora)} &= 3,6 \times 10^6 J && (3.8) \end{aligned}$$

Potencia

$$\begin{aligned} \text{J/s} &= \text{kg m}^2\ /\text{s}^2 = \text{W (watt)} && (3.9) \\ \text{1kW} &= 10^3\text{W} && (3.10) \\ \text{1MW} &= 10^6\text{W} && (3.11) \\ \text{1GW} &= 10^9\text{W} && (3.12) \\ \text{hp (caballo de fuerza)} &= 745,7\text{W} && (3.13) \end{aligned}$$

3.1.2. Resumen de trabajo y energía

$$\Delta E_c = W_T \tag{3.14}$$

Siendo W_T el trabajo de todas las fuerzas.

$$-\Delta U = W_C \tag{3.15}$$

Siendo W_C el trabajo de las fuerzas conservativas y U la energía potencial.

$$\Delta(E_c + U) = W_{NC} \tag{3.16}$$

Siendo W_{NC} el trabajo de las fuerzas no conservativas.

$$W = \int \vec{F} d\vec{s} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= -kx\breve{e}_x && (3.18) \\ |F|^{roz} &\leq \mu_e N && (3.19) \\ |F|^{roz}_{din} &= \mu_d N && (3.20) \end{aligned}$$

3.2. Energía Cinética

Energía que posee un cuerpo en movimiento

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \tag{3.21}$$

El trabajo hecho por una fuerza que actúa sobre una partícula es igual al cambio de su energía cinética.

$$W_T = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{3.22}$$

Unidades

La energía se mide en las mismas unidades que el trabajo (joules). Además, para describir procesos químicos atómicos y nucleares se usa el *electronvolt* (eV) equivalente a: $1,60218 \times 10^{-13}$J

3.3. Trabajo de una fuerza constante

$$W = \int_a^b F dr = F \int_a^b dr = F(r_b - r_a) \tag{3.23}$$

Es decir, *no depende de la trayectoria*, solamente del punto inicial y el final.

La gravedad provoca en todos los cuerpos $P = mg$ que es constante en el tiempo y la trayectoria, de manera que el trabajo del peso será (tomando eje positivo hacia arriba):

$$W = -mg(r_b - r_a) = mgr_a - mgr_b \tag{3.24}$$

3.4. Fuerzas conservativas

Una fuerza es conservativa cuando el trabajo que realiza no depende de la trayectoria, sino que puede ser expresado por la variación entre la posición inicial y final. Cuando la trayectoria es cerrada, el trabajo es nulo.

3.5. Energía potencial

Va asociada a una fuerza conservativa, y sólo es función de la posición inicial y final.

$$W = -\Delta E_p \tag{3.25}$$

Siendo W el trabajo de la fuerza asociada a la energía potencial.

Cuando la fuerza es el peso, la energía potencial es:

$$E_p = mgy \tag{3.26}$$

Siendo y la altura.

El nivel de referencia a partir del cual se mide es arbitrario.

3.5.1. Resumen energía potencial

Asociado a una fuerza conservativa

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{3.27}$$

Siendo U la energia potencial.

Si $\vec{F} = mg \Rightarrow U = mgh$

Y en el caso de un resorte:

$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.28}$$

3.6. Relación entre fuerza y energía potencial

Las componentes en los distintos ejes de una fuerza conservativa pueden obtenerse haciendo:

$$F_x = -\frac{\delta E_p}{\delta x} \quad F_y = -\frac{\delta E_p}{\delta y} \quad F_z = -\frac{\delta E_p}{\delta z}$$

Es decir, una fuerza conservativa F es igual al negativo del gradiente de la energía potencial:

$$\vec{F} = -\nabla \vec{E_p} \tag{3.29}$$

Cuando la fuerza es central, la energía potencial depende solamente de la distancia al centro:

$$\vec{F} = -\frac{\delta \vec{E_p}}{\delta \vec{r}} \tag{3.30}$$

3.7. Conservación de la energía de una partícula

Cuando la fuerza que actúa sobre una partícula es conservativa, $\Delta E_k = -\Delta E_p$ es decir que: $\Delta(E_k + E_p) = 0$, teniendo en cuenta que $E_k + E_p = E$, tenemos: $\Delta E = 0$, es decir que la *energía total* del sistema permanece constante, la energía cinética y la potencial pueden variar, pero la suma de ambas permanece constante.

3.8. Fuerzas no conservativas y disipación de energía

Un cuerpo puede estar sometido a fuerzas conservativas y no conservativas a la vez. Cuando hay fuerzas no conservativas, producen una disminución en la suma de las energías cinética y potencial de la partícula:

$$W_{\text{FNC}} = \Delta(E_k + E_p) \tag{3.31}$$

En este caso no puede aplicarse el concepto de energía total, pues hay otras energías que no son ni cinéticas ni potenciales.

Parte II

Estudio de más de una partícula

Capítulo 4

Sistemas de Partículas

4.1. Resumen

$$
\begin{aligned}
M &= \sum m_i && (4.1)\\
\vec{r}_{cm} &= \frac{1}{M}\sum m_i\vec{r}_i && (4.2)\\
\vec{v}_c m &= \frac{1}{M}\sum m_i\vec{v}_i && (4.3)\\
\sum \vec{F}_e xt &= M\vec{a}_c m && (4.4)\\
\vec{L}^{lab} &= \vec{L}_{cm} + M\vec{r}_{cm}\times\vec{v}_{cm} && (4.5)\\
E^{total} &= U + E_{pext} = E_k + E_{pint} + E_{pext} && (4.6)\\
\Delta U &= W_{F_e xt} && (4.7)\\
Q &= \Delta E_c && (4.8)
\end{aligned}
$$

Si $Q = 0$ colisión elástica
Si $Q \neq 0$ colisión inelástica

4.2. Centro de masa

El centro de masa de un sistema de partículas es el punto en el cual se podría concentrar toda la masa y considerar al sistema como una partícula (para ciertos cálculos).

La posición del centro de masa está dada por:

$$r\vec{\mathrm{cm}} = \frac{\sum m_i r_i}{M} \tag{4.9}$$

4.3. Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas aislado

El centro de masa se mueve con velocidad v_{cm}, de manera que el momentum del sistema es el que tendría toda la masa si estuviera concentrada en el centro de masa:

$$\vec{P} = M\vec{v_{\mathrm{cm}}} \tag{4.10}$$

En un sistema aislado, $\vec{P}$ permanece constante y el centro de masa se mueve con velocidad constante en relación con cualquier sistema inercial.

4.4. Movimiento del centro de masa de un sistema de partículas sujeto a fuerzas externas

Fuerza interna tanto la acción como la reacción están dentro del sistema y se compensan una con la otra.

Fuerza externa sólo una de las dos fuerzas del par acción y reacción está en el sistema.

La fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es la suma de las fuerzas externas que actúan sobre cada una de sus partículas componentes.

Además, la variación con respecto al tiempo del momentum total de un sistema de partículas es igual a la fuerza resultante aplicada al sistema:

$$\frac{\delta P}{\delta t} = F_{ext} \tag{4.11}$$

Y el centro de masa se mueve como si fuera una partícula con la masa total del sistema sujeto a la fuerza externa resultante aplicada sobre las partículas.

4.5. Momentum angular de un sistema de partículas

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{4.12}$$

El momentum angular es la suma de los momentos de cada una de las partículas *calculados respecto de un mismo punto.*

Además el torque total ejercido por las fuerzas externas es la suma de los torque externos ejercidos sobre cada partícula *con respecto a un mismo punto.*

La variación respecto al tiempo del momentum angular de un sistema de partículas en relación con un punto arbitrario es igual a la suma de los torques con respecto al mismo punto, de las fuerzas externas actuantes:

$$\frac{\delta \vec{L}}{\delta t} = \vec{\tau_{ext}} \tag{4.13}$$

El momentum angular total de un sistema de partículas aislado, o de un sistema con torque externo igual a cero, es constante en módulo, dirección y sentido.

4.6. Energía cinética de un sistema de partículas

$$E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + ... + \frac{1}{2}m_nv_n^2 = \sum \frac{1}{2}m_iv_i^2 \tag{4.14}$$

y

$$\Delta E_c = W_{ext} + W_{int} \tag{4.15}$$

4.7. Conservación de la energía de un sistema de partículas

Cuando las fuerzas internas que actúan son conservativas, existe una *energía potencial interna*, que depende la naturaleza de esas fuerzas, y de la posición relativa de las partículas. Es independiente del sistema de referencia, pues lo que importa es la distancia que separa cada par de partículas.

$$W_{int} = -\Delta E_{Pint} \tag{4.16}$$

4.8. Energía propia (U)

Suma de la energía cinética de las partículas con respecto a un observador inercial más la energía potencial interna.

$$\Delta U = W_{ext} \tag{4.17}$$

Cuando el sistema es aislado, la energía propia permanece constante.

4.9. Energía total de un sistema de partículas sujeto a fuerzas externas

$$W_{ext} = -\Delta E_{Pext} \tag{4.18}$$

La *Energía total* sera:

$$E = E_C + E_{Pint} + E_{Pext} \tag{4.19}$$

4.10. Energía interna de un sistema de partículas

La energía cinética interna, es la energía cinética referida al centro de masa.

La energía total interna es la suma de la cinética y potencial internas.

La energía cinética que se observa desde el exterior del sistema es la suma de la energía cinética interna y la orbital, que depende de la velocidad con la que se mueve el centro de masa respecto del sistema exterior:

$$E_k = E_{kint} + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \tag{4.20}$$

4.11. Colisiones

Es cualquier situación en que dos partículas o sistemas de partículas interactúan provocando cambios en su movimiento en un tiempo relativamente corto.

En todas las colisiones, al no entrar en juego más fuerzas que las que producen las partículas o sistemas que se están teniendo en cuenta, el momentum total (suma de los momentos de cada una) se conserva:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \tag{4.21}$$

4.11.1. Colisión elástica

Cuando no hay cambio de energía cinética ni de energía potencial interna.

4.11.2. Colisión inelástica endoenergética

Cuando hay una disminución en la energía cinética con un aumento en la energía potencial interna de las partículas.

4.11.3. Colisión inelástica exoenergética

Cuando hay un aumento en la energía cinética con una disminución en la energía potencial interna de las partículas.

En las coliciones también se conserva el momentum angular.

Capítulo 5

Cuerpo rígido

5.1. Resumen

$$I = \sum m_i R^2 \quad (5.1)$$

$$L_z = I\omega \quad (5.2)$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (5.3)$$

(Sólo en ejes principales de de inercia)

$$E_c^{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (5.4)$$

5.1.1. Teorema de Steiner

$$I^B = I^{cm} + Md^2 \quad (5.5)$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times \vec{r}_{ap} \quad (5.6)$$

5.2. Concepto de rigidez

Un sistema compuesto por muchas partículas, es *rígido* cuando la distancia entre todas ellas permanece fija bajo la aplicación de una fuerza o torque.

ht

Figura 5.1: Dibujo de un cuerpo rigido, marcando un eje principal de inercia y el eje que queremos calcular

5.3. Ecuaciones de movimiento para un cuerpo rígido

Las partículas pueden describir movimientos de:

Traslación pura todas las partículas describen trayectorias paralelas

Rotación pura todas la partículas describen circunferencias alrededor del *eje de rotación.*

Combinación de ambas es el caso más común.

El centro de masa se mueve como si fuera una sola partícula con toda la masa concentrada ahí, que está sujeta a una fuerza igual a la suma de fuerzas externas aplicadas.

5.4. Momentum angular de un sólido rígido

Momentum angular

$$\vec{L} = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum m_i r_i^2 \tag{5.7}$$

Momento de inercia

$$I = \sum m_i r_i^2 \Rightarrow L_z = I\omega \tag{5.8}$$

Siendo z es el eje de rotación.

Sobre cada eje principal (los ejes de simetría, que pasan por el centro de cada cuerpo) hay un *momento principal de inercia.*

5.5. Ecuación de movimiento para la rotación de un sólido rígido

La velocidad angular de un sólido rígido que gira alrededor de un eje principal es constante cuando no se aplican fuerzas externas.
Cuando el torque es distinto de cero:

$$I\alpha = \tau \tag{5.9}$$

5.6. Energía cinética de rotación de un sólido rígido

Podemos ignorar su estructura interna y suponer que no cambia.
Para cualquier eje:

$$E_{krot} = \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{5.10}$$

Si el eje es principal:

$$E_{krot} = \frac{L^2}{2I} \tag{5.11}$$

La ecuación de energía cinética general es:

$$E_k = E_{kcm} + E_{krot} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{5.12}$$

Y la energía total con respecto a un observador:

$$E = E_k + E_{Pext} \tag{5.13}$$

Parte III

Movimiento Ondulatorio

Capítulo 6

Introduccion al movimiento ondulatorio. Ondas

Una onda es una perturbación que se propaga en el espacio. Pueden ser:

- **Elásticas**: hay algo material que vibra. Ej: sonido, ondas en el agua, etc
- **Electromagnéticas**: no necesita nada material para moverse. Ej: luz.

En el movimiento ondulatorio reconocemos las siguiente variables:

k : **número de onda**, número de longitudes de onda que hay en 2π.

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: **longitud de onda**, o *período espacial*, distancia que recorre la curva en un período.

$\omega = k\nu = 2\pi f$: **frecuencia angular**.

$\nu = \lambda f$: **velocidad de propagación**.

La ecuación de una perturbación depende de la posición y del tiempo: $\xi(x,t) = f(x \pm vt)$.

Cualquier perturbación puede ser expresada como una suma finita de senos y cosenos. En el caso más simple, se expresa:

$$\xi = \xi_0 \sin k(x - vt) \tag{6.1}$$

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t) \tag{6.2}$$

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}) \tag{6.3}$$

La frecuencia de la onda es propia del emisor, no cambia con los medios que atraviesa. Lo que si cambia es la longitud de onda.

6.1. Ecuación general del movimiento ondulatorio

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \frac{d^2\xi}{dx^2} \tag{6.4}$$

Describe el movimiento ondulatorio que se propaga con velocidad definida v y sin distorsión a lo largo de $+X$ o $-X$.

6.2. Ondas elásticas longitudinales en una varilla

Cuando una varilla es perturbada por una fuerza , aparece el **esfuerzo normal**: $S = \frac{F}{A}$, es la fuerza que sufre cada parte de la varilla al ser perturbada. A causa de la perturbación, la varilla puede sufrir una **deformación lineal**: $\epsilon = \frac{d\xi}{dx}$. Si no hay deformación, ξ es la misma en todas las secciones.

6.3. Ley de Hooke

$$S = Y \frac{d\xi}{dx} \tag{6.5}$$

Sólo es válida para esfuerzos y perturbaciones pequeños.

Y es el módulo de elasticidad de Young. El esfuerzo para el cual ya no se aplica la ley de Hooke, se conoce como *límite elástico* de la sustancia.

De la ley de Hooke se deduce que la velocidad de propagación de la onda es: $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$. ρ es la densidad del material que conforma la varilla.

6.4. Ondas elásticas en un resorte

Una perturbación a lo largo de un resorte estirado producirá una onda con velocidad de propagación: $v = \sqrt{\frac{kL}{m}}$

6.5. Ondas de presión en un gas

Las variaciones de presión en un gas producen ondas elásticas, que consisten en compresiones y expansiones que se propagan a lo largo del gas. Ejemplo: sonido. La diferencia principal con las varillas es que los gases son muy comprensibles y cuando se producen variaciones de presión, la densidad del gas subre el mismo tipo de variación.

$k = \rho \frac{dp}{d\rho}$, **módulo volumétrico de elasticidad**

$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$, **velocidad de propagación** (La presión también obedece a esta ecuación).

6.6. Ondas transversales en una cuerda

Una cuerda estirada que sufra una perturbación perpendicular a su longitud. Para amplitudes de perturbación pequeñas, tiene velocidad de propagación: $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$.

m es la **densidad lineal** de la cuerda (masa / longitud)

La onda transversal puede ir variando el plano en el que se propaga, a medida que avanza, cuando permanece siempre en el mismo, está **polarizada linealmente**. Si cambia de dirección, pero de forma que la cuerda se encuentra en una superficie circular cilíndrica, está **polarizada circularmente**.

6.7. Ondas elásticas transversales en una varilla

Cuando las secciónes de una varilla se desplazan transversalmente al desplazamiento de la onda, la varilla sufre una **deformacion transversal**: $\frac{d\xi}{dx}$, y el esfuerzo que soporta cada sección se llama **esfuerzo transverasal o cortante**: $S = \frac{F}{A}$. Y además, $S = G\frac{d\xi}{dx}$. Donde G es el **módulo de rigidez** del material. La velocidad de propagación de la onda es: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$.

6.8. ¿Qué se propaga en el movimiento oscilatorio?

Se propaga una condición física generada en algún lugar y transmitida a otras regiones. No es la materia lo que se propaga, sino el *estado de movimiento*. Es decir, **se propagan o transfieren energía y momentum**.

La **intensidad** de la ondaes la energía que fluye por unidad de tiempo a través de un área perpendiculara a la dirección de propagación. $I = vE$, donde E es la densidad media de energía de la onda. Y en un medio de sección de área A, la energía media total es:

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{med}} = IA = vEA \tag{6.6}$$

6.9. Concepto de frente de ondas

Es una superficie compuesta por todos los puntos del medio que son alcanzados por el movimiento ondulatorio al mismo tiempo. Todos los puntos de un frente de onda se desplazan en fase.

6.10. Superposición de dos MAS de la misma dirección y frecuencia (Interferencia)

6.11. Método fasorial

6.12. Superposición de dos MAS de la misma dirección y distinta frecuencia (batido)

6.13. Velocidad de grupo

En una onda armónica continua, o *tren de ondas*, la onda tiene una sola longitud de onda y una sola frecuencia. Cuando la onda es un **pulso**, tiene un principio y un fin, contiene varias amplitudes, frecuencias y longitudes de onda; una **señal**, consta de muchos pulsos. Si no hay dispersión, la velocidad de propagación es independiente de estos cambios.

La **velocidad de grupo** es la velocidad con la que se propaga cada máximo de onda, $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

6.14. Ondas estacionarias

Una onda estacionaria se produce cuando la onda incidente y la reflejada coinciden en una misma región.

6.15. Acústica

6.16. Noción de coherencia

6.17. Ondas estacionarias en una cuerda

En una cuerda que está sujeta de un extremo y que sufre una perturbación en el otro extremo, se producen este tipo de ondas, con ecuación: $\xi = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$. La posición de cada partícula varía en $\xi_0 = 2A\sin(kx)$.

Los puntos donde la variación de la posición de la partícula es cero, se llaman **nodos** y se encuentran en las posiciones: $x = 1/2n\lambda$. Los puntos donde la variación de la posición de la partícula es máxima se llaman **vientres**, o antinodos.

Si los dos extremos de la cuerda están fijos, en ambos debe haber un nodo, y la longitud de la cuerda debe ser un múltiplo de $\lambda/2$. La frecuencia de oscilación debe ser $f = \frac{nv}{2l}$, o también: $f = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$. Cuando $n = 1$, es la **frecuencia fundamental**. Y las posibles frecuencias de oscilación (**armónicos**), son múltiplos de la fundamental.

6.18. Ondas estacionarias en un tubo

Cuando los dos lados del tubo están abiertos, en ambos extremos hay un vientre. La longitud de la cuerda es un múltiplo de $\lambda/2$, y las frecuencias de oscilación son $f = \frac{nv}{2l}$.

Cuando uno de los extremos está abierto y el otro cerrado, en el abierto hay un vientre y en el cerrado un nodo. La longitud de la cuerda es: $\frac{2n+1}{4}\lambda$, y las frecuencias de oscilación son: $f = \frac{(2n+1)v}{4l}$. Son los múltiplos impares de la frecuencia fundamental.

6.19. Intensidad de sonido

6.20. Efecto Doppler

Cuando la fuente de ondas y el observador están en movimiento relativo, la frecuencia de ondas observadas es distinta de la frecuencia de la fuente.

La frecuencia observada es:

$$f' = \frac{v - v_o}{v - v_s} f \tag{6.7}$$

Donde, v es la velocidad de propagación del onda, v_o y v_s son las velocidades del observador y de la fuente con respecto al medio en que se propagan las ondas y f es la frecuencia original.

Capítulo 7

Óptica Física

7.1. Principio de Huyghens.

Cuando el movimiento ondulatorio llega al frente de onda S, cada partícula de ese frente se convierte en una fuente secundaria de ondas que emite **ondas secundarias**. Luego se produce un nuevo frente de onda, que es tangente a las ondas secundarias, y de esa manera se propagan las ondas en el medio. Este razonamineto sólo tiene sentido para ondas elásticas.

Para que se aplique a todas las ondas, se debe usar:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \left[\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2} \right] \tag{7.1}$$

La perturbación en un punto P en el tiempo t, puede obtenerse si se conoce la perturbación de cada partícula del frente de ondas S, tomando a cada una como una fuente de ondas secundarias. El movimiento ondulatorio en cualquier punto se obtiene sumando los movimientos ondulatorios debidos a estas fuentes secundarias.

7.2. Principio de Fermat

7.3. Experiencia de Young

Young utilizó un dispositivo con dos pequeños orificios separados por una distancia muy corta en una pantalla y una fuente luminosa colocada detrás de la pantalla, de esta manera las dos ranuras se comportan como fuentes coherentes. El patrón de interferencia es observado en una segunda pantalla, colocada paralelamente a ls fuentes.

7.4. Interferencia: de dos fuentes

Para que se produzca *interferencia*, se requiere las dos fuentes sean *coherentes*, es decir que tengan la mism a frecuencia y mantengan la diferencia de fase constante.

La amplitud de la perturbación total está dada por: $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta}$, con $\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$. Si el coseno es 1, es **interferencia constructiva**, si es -1, es **interferencia destructiva**.

Para determinar los máximos y mínimos que podemos obtener, $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$.

Cuando el ángulo es pequeño, el seno y la tangente se pueden tomar como equivalentes, de forma que la posición de los máximos es: $x = \frac{nD}{a}\lambda$ (a distancia entre fuentes, D distancia a la pantalla).

7.5. Interferencia: de varias fuentes

La máxima amplitud se produce cuando: $\sin\theta = n\lambda/a$. Con n entero distinto de cero. Esta amplitud será: $A = N^2 A_0$, y la intensidad total será: $I = N^2 I_0$.

La intensidad es cero cuando: $\sin\theta = \frac{n'\lambda}{Na}$, donde n' es un entero **no múltiplo** de N. Entre dos máximos principales hay $(n-1)$ mínimos, y $(n-2)$ máximos secundarios, que tienen una intensidad mucho menor que los principales.

7.6. Difracción (concepto)

Una onda es distorsionada por un obstáculo.

7.7. Difracción de Fraunhofer

Un frente de ondas que incide perpendicularmente sobre una ranura rectangular muy estrecha, produce ondas difractadas, debidas únicamente a la parte del frente de ondas que pasa por la ranura. La distribución de las intensidades de las ondas se obtiene sumando las ondas emitidas por cada punto situado entre un extremo y el otro de la ranura.

Las ondas se difractan un ángulo θ, tal que los puntos en que la intensidad es cero, son: $\sin\theta = n\lambda/b$, donde b es el ancho de la ranura, n es un número entero, excepto el 0. Entre dos de estos ceros, existe un máximo, pero los máximos disminuyen su intensidad a medida que se alejan del centro.

En el caso en que la ranura es rectangular y los dos lados son de tamaños semejantes, el patrón de difracción es la combinación de los dos patrones debidos a cada par de lados. En lugar de una serie de bandas, obtenemos una serie de rectángulos distiribuídos en forma cruzada.

7.8. Redes de difracción

Es un conjunto de N ranuras paralelas del mismo ancho b, separadas a una distancia a. Si sobre la ranura incide perpendicularmente un frente de onda plano, se observa un patrón de interferencia, modulado por el patrón de difracción. Los máximos principales estarán dados por $\sin\theta = n\lambda/a$, pero sus intensidades estarán moduladas por el patrón de difracción, cuyos ceros están dados por: $\sin\theta = n'\lambda/b$, donde n y n' son números enteros, n' excluye el cero.

Cuando sobre una red de difracción inside luz de distintas longitudes de onda, estas longitudes de onda producen máximos de difracción en diferentes ángulos, excepto para el máximo central. El conjunto de máximos de un ciero orden para todas las longitudes de onda constituye un **espectro**.

Capítulo 8

Óptica geométrica

8.1. Leyes de Snell

8.2. Índice de refracción

8.3. Espejos planos y curvos

8.4. Dioptras

8.5. Lentes

8.6. Instrumentos ópticos

Capítulo 9

Leyes de gravitación